CHAPTER 10: HYPOTHESIS TESTS OF A SINGLE POPULATION

Concepts of Hypothesis Testing

- We test validity of a claim or a conjecture (hypothesis) about a population parameter by using a sample data

- *Null Hypothesis*: The hypothesis that is maintained unless there is a strong evidence against it

- *Alternative Hypothesis*: The hypothesis that is accepted when the null hypothesis is rejected

  – Note: If you do not reject the null hypothesis, it does not mean that you accept it. You just fail to reject it

- *Simple Hypothesis*: A hypothesis that population parameter, θ, is equal to a specific value, θ_0

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

- *Composite Hypothesis*: A hypothesis that population parameter is equal to a range of values

– *One-Sided Composite Alternative Hypothesis*:

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

or

$$H_1 : \theta < \theta_0$$

– *Two-Sided Composite Alternative Hypothesis*:

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- *Hypothesis Test Decisions*: In order to decide to accept the Null hypothesis, or reject it in favor of the alternative, we should formulate a decision rule. Below, we go over some related definitions
  - *Type I Error*: Rejecting a true null hypothesis
  - *Type II Error*: The failure to reject a false null hypothesis

– *Significance Level of a Test*: The probability of making Type I error, which is often denoted in percentage and by α.

  * In this case a test is referred to as a $(100-\alpha)\%$ level test

– *Power of a Test*: The probability of not making Type II error

	Null is True	Null is False
Reject Null	Type I Error	Correct
Fail to Reject Null	Correct	Type II Error

- Type I and Type II errors are inversely related: As one increases, the other decreases (but not one to one)

- Örnek: Bir fabrikada paketlenen pirinç çuvallarının ağırlığından bahsedelim
  - Null (yokluk) hipotezimiz simple (basit) bir hipotez olan pirinç çuvallarının ağırlığının 16 kg'a eşit olduğu olsun

$$H_0 : \mu = 16$$

bu durumda alternatif hipotezimiz, tek yönlü birleşik hipotezler olan

$$H_1 : \mu > 16 \quad \text{veya} \quad H_1 : \mu < 16$$

veya iki yönlü birleşik bir hipotez olan

$$H_1 : \mu \neq 16$$

olabilir

– Bunun yanında birleşik bir Null hipotez de tanımlanabilir

$$H_0 : \mu \leqslant 16$$

bu durumda alternatif hipotez ise

$$H_1 : \mu > 16$$

olacaktır

Tests of the Mean of a Normal Distribution: Population Variance Known

- A test with significance level α of the null

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

against the alternative

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

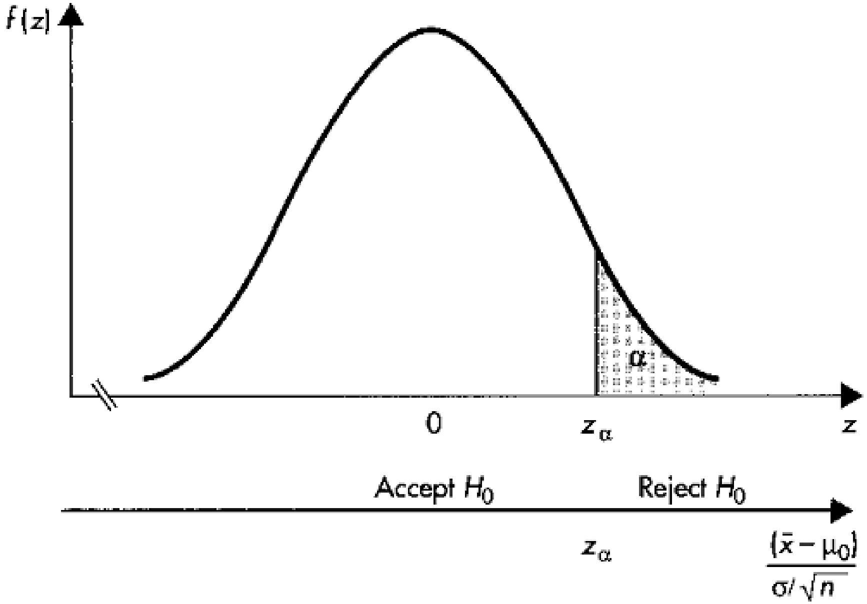
is obtained by using the following decision rule

$$Reject \;\; H_0 \;\; if: \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$$

$$\text{or equivalently} \quad \bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{n}$$

- If we use a figure

FIGURE 9.2 The probability density function of $Z = (\overline{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ when the null hypothesis H_0: $\mu = \mu_0$ is true and the decision rule for testing H_0 against the alternative H_1: $\mu > \mu_0$ at significance level α



- In this case α is the significance level of the test (Probability of rejecting a true null hypothesis)
- If it was two-sided test, the significance level of the test would had been 2α
- Yet, the power of the test (The probability of not rejecting a false null hypothesis) is not $1 - 2\alpha$.
  - Because, if null hypothesis is wrong, then you hold the alternative hypothesis. It means the underlying distribution is different

- Örnek: Bir malın üretim sistemi doğru olarak çalıştığı zaman, ürünlerin ağırlığının ortalamasının 5 kg, standart sapmasının da 0.1 kg olduğu, ve bu ağırlıkların normal bir dağılıma sahip olduğu görülmüştür. Üretim müdürü tarafından yapılan bir değişiklik sonucunda, ortalama ürün ağırlığının artması, ama standart sapmasının değişmemesi amaçlanmıştır. Bu değişiklikten sonra 16 elemanlı rassal bir örneklem seçildiği zaman, bu örneklemdeki ürünlerin ortalama ağırlığı 5.038 kg olarak bulunmuştur. Son populasyondaki ürün ağırlığının 5 kg olması null hipotezini, alternatif hipotez olan 5 kg'dan büyük olması hipotezine göre %5 ve %10 önem derecesinde (significance level) test ediniz

– Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 : \mu = 5$$

şu alternetif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : \mu > 5$$

– Aşağıdaki koşul sağlandığı zaman H_0'ı H_1'a karşı reddedebiliriz

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$$

– Soruda verilenler: $\bar{x} = 5.038 \quad \mu_0 = 5 \quad n = 16 \quad \sigma = .1$, dolayısıyla

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5.038-5}{.1/\sqrt{16}} = 1.52$$

– Önem derecesi %5 ise; standart normal tablosundan %5'e denk gelen z değeri

$$z_{0.05} = 1.645$$

dolayısıyla 1.52 bu sayıdan daha büyük olmadığından null hipotezini %5 önem seviyesinde reddedemiyoruz (fail to reject)

– 5.038 değeri, 5 değerinden çok uzak bulunmamıştır

– Önem derecesi %10 ise; standart normal tablosundan %10'e denk gelen z değeri

$$z_{0.1} = 1.28$$

bu sefer 1.52 bu sayıdan daha büyük olduğundan null hipotezini %10 önem düzeyinde reddedebiliyoruz

- *Probability Value (p-value)*:* In the previous example we have seen that we could not reject a test at %5 significance level, but at %10. Hence it is possible to find the smallest significance level at which the null hypothesis is rejected, this is called p-value of a test. Formally, if random sample of n observations was obtained from a normally distributed population with mean μ and known variance σ^2, and if the observed sample mean is $\bar{x}$, the null hypothesis

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

is tested against the alternative

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

The p-value of the test is

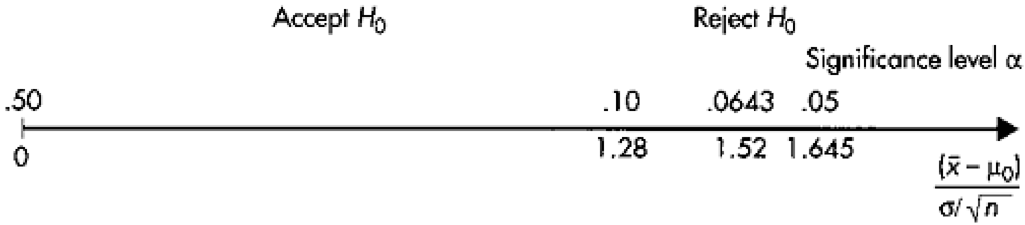
$$p - value = P(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_p \mid H_0 : \mu = \mu_0)$$

- Örnek: Bir önceki örnekte

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5.038-5}{.1/\sqrt{16}} = 1.52$$

bulunmuştu. Bu eşitliği sağlayan α değeri standart normal tablosundan 0.643 olarak bulunabilir, testin p-değeridir. Şekille gösterirsek

FIGURE 9.3 Rejection regions for testing H_0: $\mu = \mu_0$ against H_1: $\mu > \mu_0$ for significance levels .10, .0643, and .05



Composite Null and Alternative Hypothesis

- The appropriate procedure for testing, at significance level α, the null hypothesis

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

against the alternative hypothesis

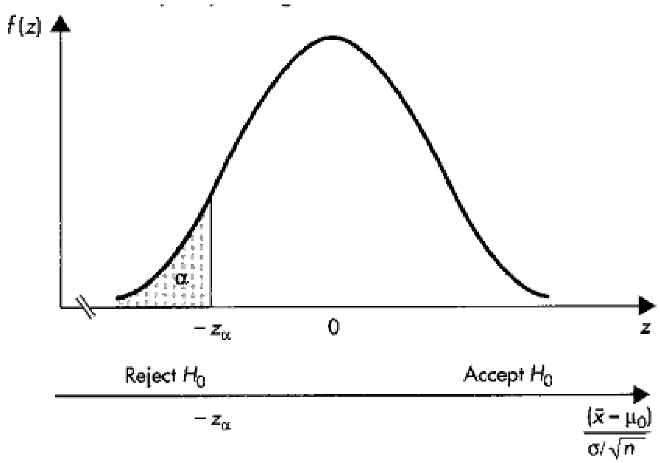
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

is precisely the same when the null hypothesis is $H_0 : \mu = \mu_0$. In addition, p-values are also computed in exactly the same way

- Dolayısıyla karar kuralımız

$$Reject\ H_0\ if: \quad \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$$

– Şekille gösterirsek



- Örnek: 541 müşteriye mağazadan memnuniyetleri sorulmuş, ve 5 (çok kötü)'den 1(çok iyi)'ye kadar değerlendirmeleri istenmiştir. Örneklem ortalaması 3.68 çıkmıştır. Yıllar itibariyle oluşan gözlemlerdem müşteri populasyonunun standart sapmasının 1.21 olduğuda bilinmektedir. Müşteri populasyonunun değerlendirme ortalamasının 3.75 veya daha üstü olmasının pozitif bir müşteri memnuniyetine sahip bir mağaza olacağı düşünülürse, bu yıl ki populasyonun değerlendirme ortalamasının 3.75 veya daha yüksek olması null hipotezini alternative hipotez olan 3.75'den küçük olması hipotezine karşı test ediniz

– Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 : \mu \geqslant 3.75$$

şu alternatif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : \mu < 3.75$$

– H_0'ı H_1'a karşı reddetmek için karar kuralı (decision rule)

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$$

– Soruda verilenler: $\bar{x} = 3.68 \quad \mu_0 = 3.75 \quad n = 541 \quad \sigma = 1.21$, dolayısıyla

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{3.68 - 3.75}{1.21/\sqrt{541}} = -1.35$$

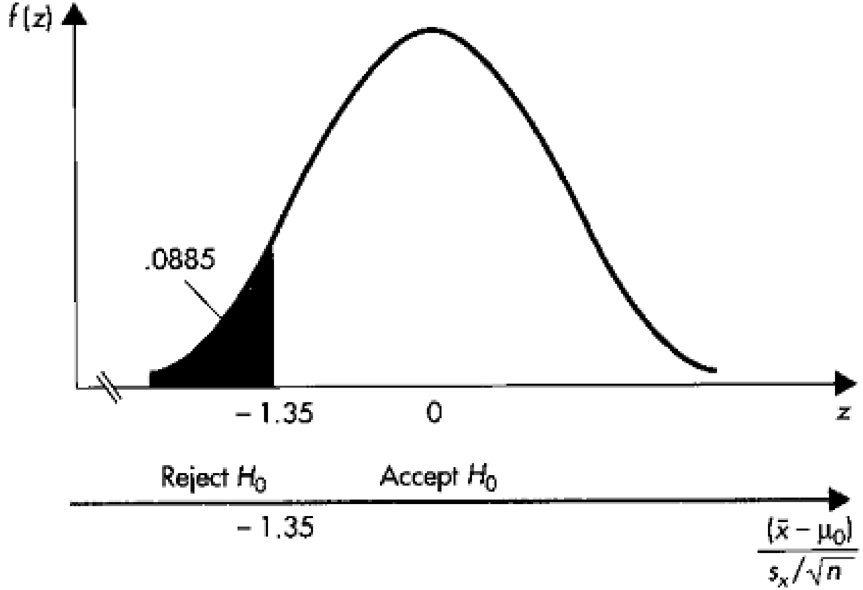
– Standart normal tablosundan bu eşitliği sağlayan α değeri

$$z_\alpha = 1.35 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 0.0885$$

olduğundan, %8.85'den büyük herhangi bir önem derecesinde null hipotezi reddedilir

– Şekille gösterirsek

FIGURE 9.6 Conclusion of the test in Example 9.3: the null hypothesis H_0: $\mu \geq \mu_0$ is rejected against the alternative H_1: $\mu < \mu_0$ at significance levels greater than .0885.



Simple Null Against Two-Sided Alternative

- To test the null hypothesis

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

against the alternative at significance level α

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

use the following decision rule

$$Reject \;\; H_0 \;\; if : \quad \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha/2}$$

$$\text{or} \quad \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > -z_{\alpha/2}$$

- Örnek: Bir delgi makinası düzgün çalıştığında standart sapması 0.06 cm olan normal dağılıma sahip delikler açabilmektedir. 9 elemanlı bir örneklem seçildiğinde bunların ortalama genişliğinin 1.95 cm olduğu görülmüştür. Ortalama delik genişliğinin 2 cm olduğu null hipotezini, alternatif hipotez olan 2 cm olmadığı hipotezine karşı % 5 önem derecesi kullanarak test ediniz. Ayrıca testin p-değerini bulunuz

– Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 \ \mu = 2$$

şu alternetif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : \mu \neq 2$$

– H_0'ı H_1'a karşı reddetmek için karar kuralı (decision rule)

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2} \quad \text{or} \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha/2}$$

– Soruda verilenler: $\bar{x} = 1.95 \quad \mu_0 = 2 \quad n = 9 \quad \sigma = .06$, dolayısıyla

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1.95 - 2}{.06/\sqrt{9}} = -2.5$$

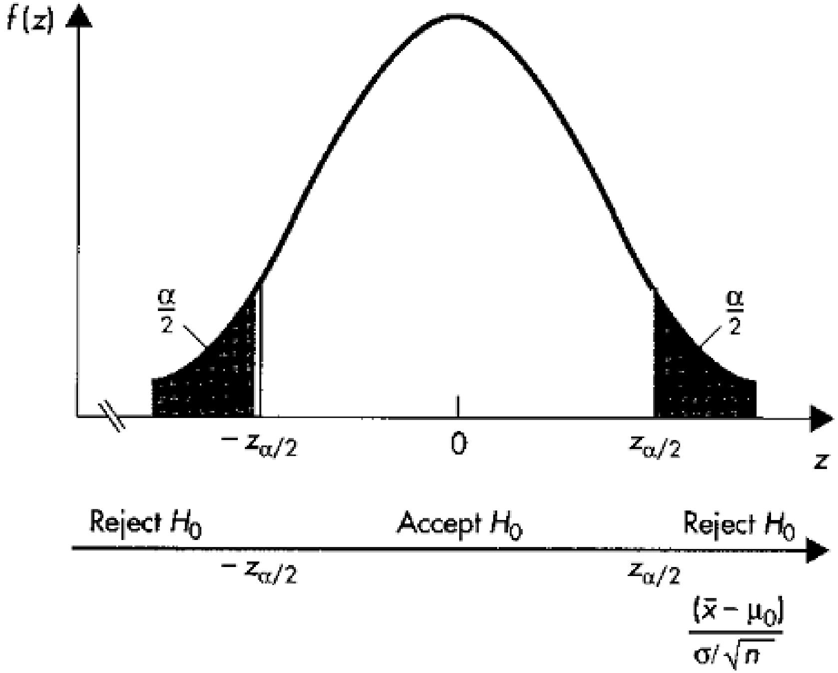
– Standart normal tablosundan %5'e denk gelen z değeri ise

$$z_{0.025} = 1.96$$

dolayısıyla -2.50 bu sayıdan daha yüksek olduğundan null hipotezini %5 önem düzeyinde reddediyoruz

– Şekille gösterirsek

FIGURE 9.5 The probability density function of $Z = (\overline{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ when the null hypothesis H_0: $\mu = \mu_0$ is true and the decision rule for testing H_0 against the alternative H_1: $\mu \neq \mu_0$ at significance level α



– Standart normal tablosundan bakacak olursak $-z_{\alpha/2}$'yi -2.5'e eşit yapacak olan $\alpha/2 = 0.0062$'dir.

– Dolayısıyla $\alpha = 0.0124$ olarak bulunur. Bu da testin p-değeridir

Tests of the Mean of a Normal Distribution: Population Variance Unknown

- We are given a random sample of n observations was obtained from a normally distributed population with mean μ. Using the sample mean and sample standart deviation, $\bar{x}$ and s respectively, we can use the following tests with significance level α

1. To test the null hypothesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{or} \quad H_0 : \mu \leqslant \mu_0$$

against the alternative

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

the decision rule is as follows

$$Reject \;\; H_0 \;\; if : \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha}$$

2. To test the null hypothesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{or} \qquad H_0 : \mu \geqslant \mu_0$$

against the alternative

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

the decision rule is as follows

$$Reject \;\; H_0 \;\; if: \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha}$$

3. To test the null hypothesis

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

against the alternative

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

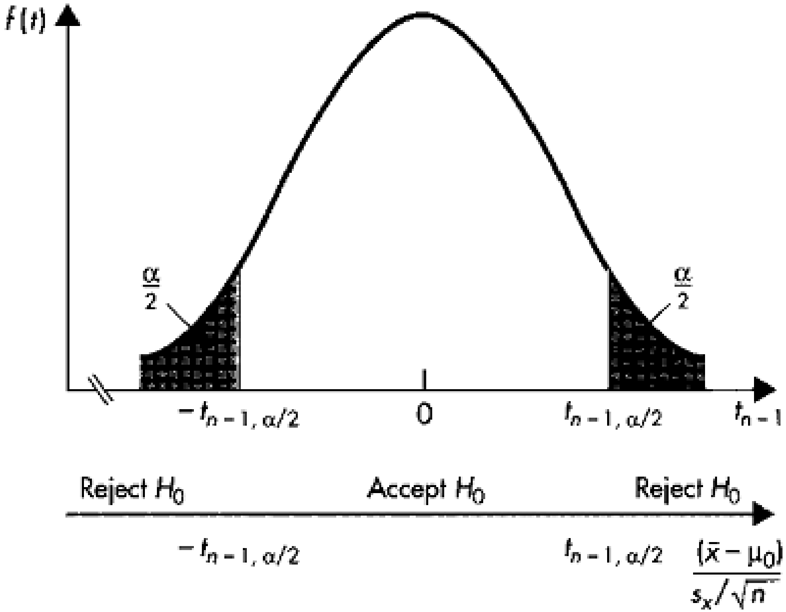
the decision rule is as follows

$$Reject\ \ H_0\ \ if: \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha/2}$$

$$\text{or} \qquad \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha/2}$$

bunu şekille gösterirsek

FIGURE 9.7 The probability density function of $t_{n-1} = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{s_X/\sqrt{n}}$ when the null hypothesis H_0: $\mu = \mu_0$ is true and the decision rule for testing H_0 against the alternative H_1: $\mu \neq \mu_0$ at significance level α



- Örnek: Bir fast food zincirinden 6 satış noktası seçilmiştir ve bu noktalarda Aralık ayı için şu % satış artışları gözlemlenmiştir: 19.2 18.4 19.8 20.2 20.4 19.0. Populasyonun normal dağıldığı kabul edildiğinde, ortalama satış artışının %20 olduğu null hipotezini alternatif iki yönlü hipotezine karşı %10 önem derecesine göre test ediniz.

– Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 : \mu = 20$$

şu alternetif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : \mu \neq 20$$

H_0'ı H_1'a karşı reddetmek için bakmamız gereken karar kuralı ise

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha/2} \quad \text{or} \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha/2}$$

– İlk önce örneklem ortalama ve standart sapmasını hesaplayalım

	x_i	y_i
	19.2	368.64
	18.4	338.56
	19.8	392.04
	20.2	408.04
	20.4	416.16
	19.0	361.00
Toplamlar	117.0	2,284.44

– Dolayısıyla örneklem ortalaması

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{117}{6} = 19.5$$

örneklem varyasyonu

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}{n-1} = \frac{2,284.44 - 6 * 19.5^2}{5} = .588$$

ve standart sapması

$$s_x = \sqrt{.588} = .767$$

– Bu değerleri kullandığımızda

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x/\sqrt{n}} = \frac{19.5-20}{.767/\sqrt{6}} = -1.597$$

– Şimdi %10 önem dereceli testimizi yaparsak, gerekli olan t değeri

$$t_{n-1,\alpha/2} = t_{5,.05} = 2.015$$

-1.597 değeri -2.015 ve 2.015 değerleri arasında olduğundan, ortalamanın %20 artmış olduğu null hipotezini %10 önem derecesinde reddedemiyoruz

Tests of the Population Proportion (Large Samples)

- Daha önceki bölümlerde bir populasyondaki bir olayın tekrarlanma oranını P, örneklemdeki tekrarlanma oranını ise $\hat{p}$ ile gösterdiğimizde, aşağıdaki Z rassal değişkenin dağılımının standart normal olduğundan bahsetmiştik

$$Z = \frac{\hat{p} - P}{\sqrt{P(1-P)/n}}$$

Test ettiğimiz null hipotezi

$$H_0 : P = P_0$$

ise, bu hipotez doğruysa aşağıdaki rassal değişken de normal dağılıyordur.

$$Z = \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1 - P_0)/n}}$$

Dolayısıyla;

1. To test the null hypothesis

$$H_0 : P = P_0 \quad \text{or} \quad H_0 : P \leq P_0$$

against the alternative

$$H_1 : P > P_0$$

the decision rule is as follows

$$Reject \;\; H_0 \;\; if : \quad \frac{\hat{p}_x - P_0}{\sqrt{P_0(1 - P_0)/n}} > z_\alpha$$

2. To test the null hypothesis

$$H_0 : P = P_0 \quad \text{or} \quad H_0 : P \geq P_0$$

against the alternative

$$H_1 : P < P_0$$

the decision rule is as follows

$$Reject \;\; H_0 \;\; if: \quad \frac{\hat{p}_x - P_0}{\sqrt{P_0(1 - P_0)/n}} < -z_\alpha$$

3. To test the null hypothesis

$$H_0 : P = P_0$$

against the alternative

$$H_1 : P \neq P_0$$

the decision rule is as follows

$$Reject \;\; H_0 \;\; if : \quad \frac{\hat{p}_x - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} < -z_{\alpha/2}$$

$$\text{or} \quad \frac{\hat{p}_x - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} > z_{\alpha/2}$$

- Örnek: 802 süpermarket müşterisinden 378 tanesi aldıkları ürünün fiyatını, o ürünü arabalarına koyduktan hemen sonra sorulduğunda doğru yanıtlamıştır. Tüm müşteri populasyonunun en az %50'sinin doğru fiyatı söylebildikleri null hipotezini, alternatif hipotez olan daha azının söylediği hipotezine karşı %10 önem derecesinde test ediniz.

– Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 : P \geq .50$$

şu alternetif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : P < .50$$

– H_0'ı H_1'a karşı reddetmek için karar kuralı

$$\frac{\hat{p}_x - P_0}{\sqrt{P_0(1 - P_0)/n}} < -z_\alpha$$

– Soruda verilenler: $P_0 = .50 \quad n = 802 \quad \hat{p}_x =$

$378/802 = .471$

$$\frac{\hat{p}_x - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} = \frac{.471 - .50}{\sqrt{.5 * .5/802}} = -1.64$$

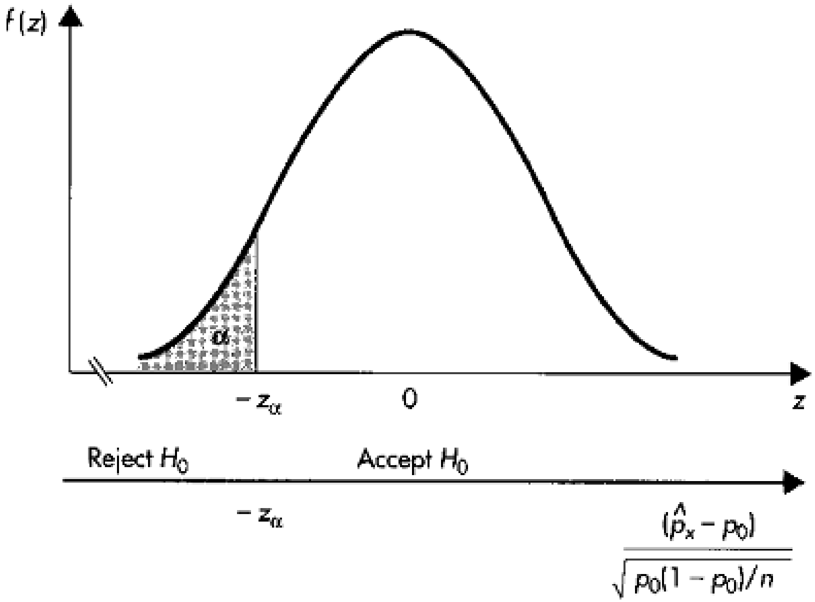
– Standart normal tablosundan %10'a denk gelen z değeri ise

$$z_\alpha = z_{.10} = 1.28$$

1.64 bu sayıdan daha büyük olduğundan null hipotezini %10 önem düzeyinde reddediyoruz

– Şekille gösterdiğimizde

FIGURE 9.10 The probability density function of $Z = \frac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ when the null hypothesis H_0: $p = p_0$ is true and the decision rule for testing H_0 against the alternative H_1: $p < p_0$ at significance level α



Determining the Probability of Type II Error

- Consider the test

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

against the alternative

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

using the decision rule

$$Reject \;\; H_0 \;\; if : \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$$

- Now suppose the null hypothesis is wrong and the population mean, μ^*, is in the region of H_1. Type II error is the failure to reject a false null hypothesis. Thus, we consider a $\mu = \mu^*$ such that $\mu^* > \mu_0$. Then the probability of making Type II error is

$$\beta = P(z < \frac{\bar{x} - \mu^*}{\sigma/\sqrt{n}})$$

therefore the Power of a Test (the probability of not making Type II error)

$$1 - \beta$$

- Örnek: Daha önce verdiğimiz örnekte, 16 elemanlı rassal bir örneklem seçildiği zaman, bu örneklemdeki ürünlerin ortalama ağırlığının 5 kg olması null hipotezini, alternatif hipotez olan 5 kg'dan büyük olması hipotezine göre %5 önem derecesinde test etmiştik

  – Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 : \mu = 5$$

  şu alternatif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : \mu > 5$$

– Soruda verilenler: $\mu_0 = 5 \qquad n = 16 \qquad \sigma^2 = .1 \qquad z_\alpha = z_{.05} = 1.645$, dolayısıyla H_0'ı H_1'a karşı reddetmek için karar kuralı (decision rule)

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - 5}{.1/4} > 1.645$$

$$\text{ya da} \qquad \bar{x} > 1.645 * (.1/4) + 5 = 5.041$$

bu da demek oluyor ki örneklem ortalaması 5.041'den küçük olduğunda null hipotezimizi reddedemiyor olacağız

– Diyelim ki populasyon ortalaması 5.05 olsun (yani alternatif hipotez doğru olsun), ve null hipotezimizi reddetmeyerek Type II Error yapma ihtimalimizi bulalım. Yani populasyon ortalaması 5.05 iken örneklem ortalamasının 5.041'den küçük olma ihtimalini

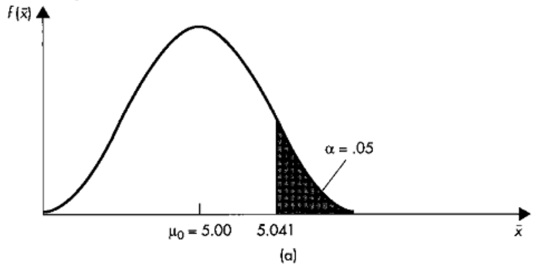
$$P(\bar{X} \le 5.041) = P(Z \le \frac{5.041 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}})$$
$$= P(Z \le \frac{5.041 - 5.05}{.1/4}) = P(Z \le -.36)$$
$$= 1 - .64 = 0.36$$

dolayısıyla testimizin gücü

$$Power = 1 - \beta = .64$$

$*$ Şekille gösterirsek

FIGURE 9.12 Sampling distributions of sample mean for sixteen observations with $\sigma = .1$ with (a) $\mu = 5$, (b) $\mu = 5.05$; figure shows calculation of power $1 - \beta$, corresponding to significance level $\alpha = .05$ for testing H_0: $\mu = 5$ against H_1: $\mu > 5$; power is evaluated at $\mu = 5.05$



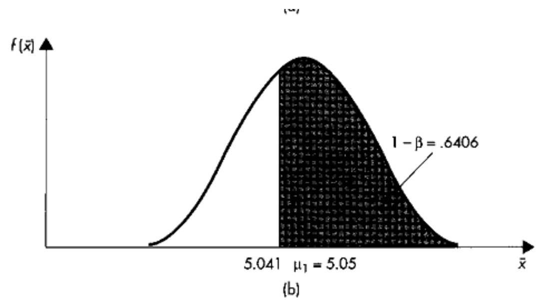
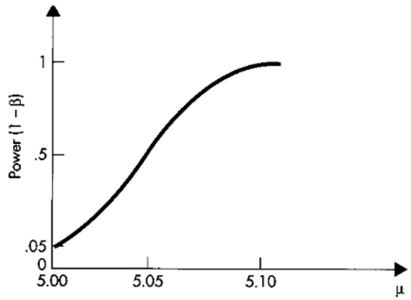


FIGURE 9.13 Power function for test H_0: $\mu = 5$ against H_1: $\mu > 5$ ($\alpha = .05$, $\sigma = .1$, $n = 16$)



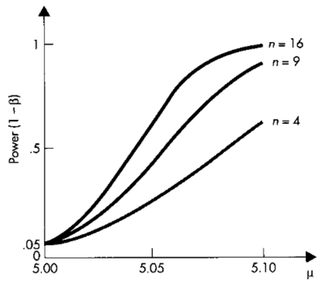


FIGURE 9.14 Power functions for test of H_0: $\mu = 5$ against H_1: $\mu > 5$ ($\alpha = .05$, $\sigma = .1$), shown for sample sizes 4, 9, 16

- Örnek: 600 kişilik bir örneklem seçilmiş ve bu kişilerde 382 tanesinin A partisine oy vereceği anlaşılmıştır. Eğer null hipotezimiz populasyonun %50'sinin A partisine oy vereceği, ve alternatifimiz de iki yönlü bir hipotezse, null hipotezi %5 önem derecesinde test ediniz

– Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 : p = 0.5$$

şu alternetif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : p \neq 0.5$$

– H_0'ı H_1'a karşı reddetmek için karar kuralı (decision rule)

$$\frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} > z_{\alpha/2} \quad \text{or} \quad \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} < -z_{\alpha/2}$$

– Soruda verilenler: $P_0 = .50 \quad n = 600 \quad z_{\alpha/2} = z_{.025} = 1.96$, dolayısıyla

$$\frac{\hat{p} - .50}{\sqrt{\frac{.50 * .50}{600}}} > 1.96 \quad \text{or} \quad \frac{\hat{p} - .50}{\sqrt{\frac{.50 * .50}{600}}} < -1.96$$

Yani

$$.46 \leq \hat{p} \leq .54$$

– Sorudaki örneklemdeki değer

$$\hat{p}_X = 382/600 = .637$$

dolayısıyla %5 önem derecesinde null hipotezi reddediyoruz

- Şimdi diyelim ki populasyon ortalaması 0.55 olsun ve Type II error yapma ihtimalini bulalım. Yani populasyon değeri 0.55 iken örneklem değerinin 0.46 ila 0.54 arasında olma ihtimali

$$P(.46 \leq \hat{p}_X \leq .54)$$

$$= P(\frac{.46 - P_1}{\sqrt{P_1(1 - P_1)/n}} \leq Z \leq \frac{.54 - P_1}{\sqrt{P_1(1 - P_1)/n}})$$

$$= P(\frac{.46 - .55}{\sqrt{.55 * .45/600}} \leq Z \leq \frac{.54 - .55}{\sqrt{.55 * .45/600}})$$

$$= P(-4.43 \leq Z \leq -.49) = .3121$$

dolayısıyla testimizin gücü

$$Power = 1 - \beta = .688$$

– Şekille gösterirsek

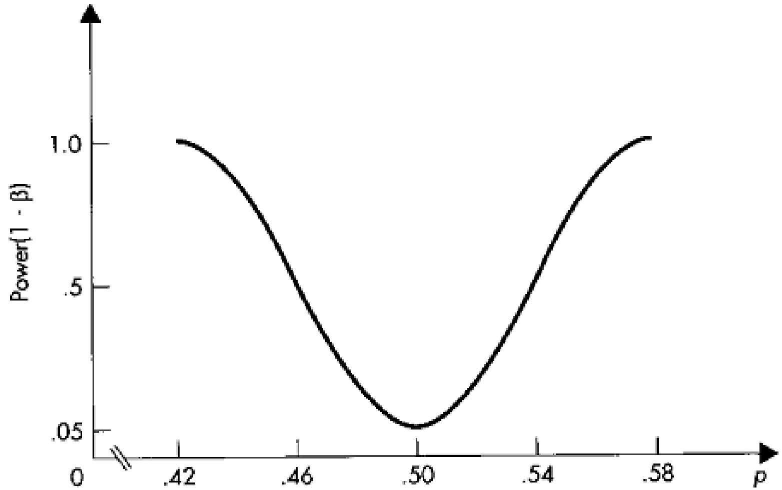


FIGURE 9.15 Power function for test of H_0: $p = .50$ against H_1: $p \neq .50$ ($\alpha = .05$, $n = 600$)

Tests of the Variance of a Normal Distribution

- A random sample of n observations was obtained from a normally distributed population with variance σ^2. If the sample variance s^2, remember that following random variable
$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$
has a χ^2 (chi-square) distribution with $n-1$ degrees of freedom

- Then we can use the following tests with significance level α

1. To test the null hypothesis

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{or} \quad H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

against the alternative

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

the decision rule is as follows

$$Reject \;\; H_0 \;\; if : \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}$$

2. To test the null hypothesis

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{or} \quad H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$

against the alternative

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

the decision rule is as follows

$$Reject \;\; H_0 \;\; if : \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$$

3. To test the null hypothesis

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

against the alternative

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

the decision rule is as follows

$$Reject \;\; H_0 \;\; if : \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$$

$$\text{or} \qquad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$$

- Örnek: Bir deterjandaki istenmeyen kimyasal madde yüzdesinin varyansının %4'ten fazla olması istenmemektedir. 20 tane rassal detarjan kutusu seçildiğinde örneklem varyansının %5.62 olduğu gözlemlenmiştir. Populasyon varyansının %4'ten fazla olmaması null hipotezini %10 önem derecesine göre test ediniz.

– Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 4$$

şu alternetif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : \sigma^2 > 4$$

– H_0'ı H_1'a karşı reddetmek için karar kuralı

$$\frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}$$

– Soruda verilenler: $s_X^2 = 5.62 \quad n = 20 \quad \sigma_0^2 = 4$, dolayısıyla

$$\frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 * 5.62}{4} = 26.7$$

– %10'a denk gelen 19 serbestlik dereceli chi-square değeri ise

$$\chi^2_{19,.10} = 27.2$$

26.695 değeri 27.20 değerinden büyük olmadığından, null hipotezini %10 önem düzeyinde reddedemiyoruz

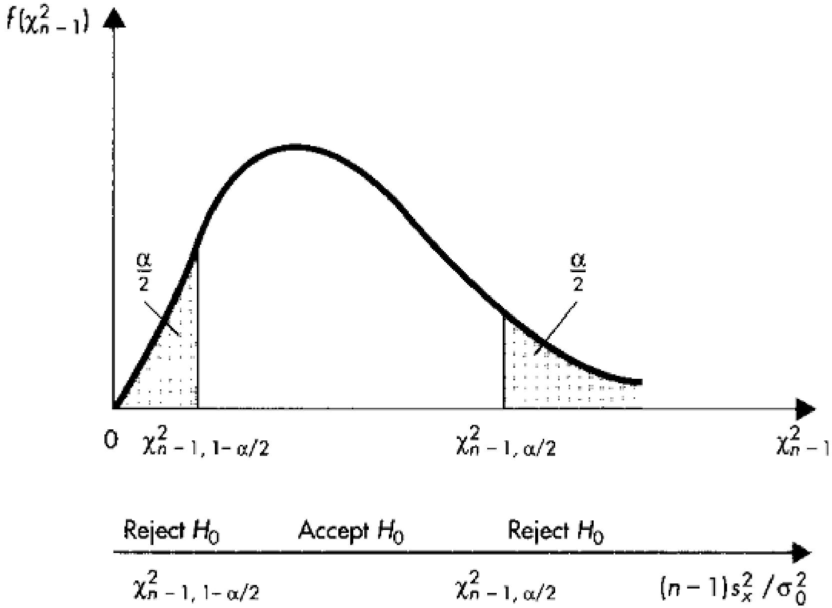


FIGURE 9.9 The probability density function of $\chi^2_{n-1} = (n-1)s_x^2/\sigma_0^2$ when the null hypothesis H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ is true and the decision rule for testing H_0 against the alternative H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ at significance level α