CHAPTER 8: CONFIDENCE INTERVAL ESTIMATION: ONE POPULATION

Point Estimators vs. Interval Estimators

- A point estimator of a population parameter is a function of the sample information that yields a single number
- An interval estimator of a population parameter is a function of the sample information that yields a range, or interval, in which the parameter is likely to fall

Properties of Point Estimators

Unbiased Estimators and Their Efficiency

- The estimator $\hat{\theta}$ is said to be an unbiased estimator of the parameter θ if the mean of the sampling distribution of $\hat{\theta}$ is θ:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

That is to say if the sampling prosedure is repeated many times, then on the average the value obtained for an unbiased estimator will be equal to the population parameter

- For ex. in the case that $E(\bar{x}) = \mu$ and $E(s^2) = \sigma^2$, we say that the sample mean and variance is unbiased (point) estimators of the population mean and variance

- If $E(\hat{\theta}) \neq \theta$, then we say that $\hat{\theta}$ is a biased estimator of θ and the bias can be found as

$$Bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

- Let $\hat{\theta}_1$ and $\hat{\theta}_2$ be two unbiased estimators of θ. Then $\hat{\theta}_1$ is said to be more efficient than $\hat{\theta}_2$ if

$$Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$$

and the relative efficiencies of estimators:

$$Relative\ efficiency = \frac{Var(\hat{\theta}_2)}{Var(\hat{\theta}_1)}$$

- Örnek: $X_1, X_2, ..., X_n$, ortalamalası μ ve varyasyonu σ^2 olan bir normal dağılımdan rastgele seçilmiş bir örneklemin elemanları olsun
  - Örneklem ortalaması populasyon ortalamasının yansız tahmin edicisidir, ve varyasonu da aşağıdaki gibi bulunur

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

– Örneklem medyanı da populasyon ortalamasının yansız tahmin edicisidir, ve varyasyonu da şu şekilde bulunur

$$Var(Median) = \frac{\pi}{2}\frac{\sigma^2}{n} = 1.57\frac{\sigma^2}{n}$$

– Bu iki tahmin edici karşılaştırıldığında ise ortalama daha etkin çıkacaktır

$$Relative\ efficiency = \frac{Var(Median)}{Var(\bar{X})} = 1.57$$

- Sonuç olarak hem ortalama hem medyan beklentisel olarak populasyon ortalamasını verseler de, ortalama populasyoın ortalamasının daha etkin bir tahmin edicisidir. Medyanın ortalama ile aynı varyansı vermesi için %57 daha fazla data kullanması lazımdır

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n_1} = 1.57\frac{\sigma^2}{n_2} = Var(Median)$$

$$\Rightarrow \quad n_2 = 1.57 n_1$$

- If $\hat{\theta}$ is an unbiased estimator of the parameter θ, and no other estimator has smaller variance, then $\hat{\theta}$ is said to be the most efficient of minimum variance unbiased estimator of θ

Choice of Point Estimator

- Even though unbiasedness is a desirable property, an estimator giving small bias with small variance may be more desirable than an unbiased estimator with high variance. As a result we need a measure to choose among estimators.

- One measure of the expected closeness of an estimator $\hat{\theta}$ to a parameter θ is its mean squared error

$$MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

and it can be shown that

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + [Bias(\hat{\theta})^2]$$

which takes into account both the variance and the biasedness of an estimator

- Örnek: X_1 ve X_2 ortalaması μ, ve varyansı σ^2 olan bir populasyona ait 2 rassal gözlem olsunlar. Aşağıdakiler de μ' nün nokta tahmin edicileri olsunlar

$$\mu_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \quad \mu_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2 \quad \mu_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$$

a-) Her bir tahmin edicinin yansız tahmin edici (unbiased estimator) olduğunu gösteriniz

b-) Bunlardan hangisi en etkin tahmin edicidir?

c-) X_1 tahmin edicisinin diğer iki tahmin ediciye göre göreli etkinliğini (relative efficiency) bulunuz

Cevap: a-)

$$\begin{aligned} Bias(\mu_1) &= E(\mu_1) - \mu = E(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2) - \mu \\ &= \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) - \mu = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu - \mu = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bias(\mu_2) &= E(\mu_2) - \mu = E(\frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2) - \mu \\ &= \frac{1}{4}E(X_1) + \frac{3}{4}E(X_2) - \mu = \frac{1}{4}\mu + \frac{3}{4}\mu - \mu = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Bias(\mu_3) &= E(\mu_3) - \mu = E(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2) - \mu \\
&= \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{2}{3}E(X_2) - \mu = \frac{1}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu - \mu = 0
\end{aligned}
$$

b-) X_1 ve X_2 rassal olduklarından aralarındaki covaryansı 0 kabul edersek

$$\begin{aligned} Var(\mu_1) &= Var(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2) \\ &= \frac{1}{4}Var(X_1) + \frac{1}{4}Var(X_2) = \frac{1}{2}\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\mu_2) &= Var(\frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2) \\ &= \frac{1}{16}Var(X_1) + \frac{9}{16}Var(X_2) = \frac{5}{8}\sigma^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(\mu_3) &= Var(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2) \\
&= \frac{1}{9}Var(X_1) + \frac{4}{9}Var(X_2) = \frac{5}{9}\sigma^2
\end{aligned}
$$

c-)

$$Relative\ efficiency = \frac{Var(\mu_2)}{Var(\mu_1)} = \frac{5/8\sigma^2}{1/2\sigma^2} = 1.25$$

$$Relative\ efficiency = \frac{Var(\mu_3)}{Var(\mu_1)} = \frac{5/9\sigma^2}{1/2\sigma^2} = 1.11$$

- An interval estimator of a population parameter is a rule for determining a range, or interval, in which the parameter is likely to fall. The corresponding estimate is called an interval estimate
- Örnek: Farzedelim ki rassal bir örneklem kullanarak populasyon parametresi olan θ'yı tahmin etmeye çalışıyoruz. Bu rassal örneklemden bulmaya çalışacağımız 2 tane rassal değişken A ve B öyle olsun ki

$$P(A < \theta < B) = .9$$

burada θ'nın %90 ihtimalle içinde bulunacağı aralığı bulmaya çalışıyoruz. A ile B arasındaki aralık güven aralığı tahmin edicisi (confidence interval estimator) diye adlandırılır.

- If there are two random variables such that

$$P(A < \theta < B) = 1 - \alpha$$

and a and b are specific realizations of A and B, then

  - the interval from a to b is called the $100(1 - \alpha)\%$ confience interval of θ
  - the quantity $100(1 - \alpha)\%$ is called the confidence level of the interval

Confidence Interval Estimation for the Mean of a Normal Distribution: Population Variance Known

- Örnek: Ortalaması μ, standart sapması σ olan normal dağılıma sahip bir populasyondan n elemanlı bir X örneklemi seçip bununla populasyonun ortalamasını aralık tahmini ile bulmak istersek;
- %90'lık güven aralığı bulmak isteyelim. Bu durumda iki kenardan da %5'lik bölümü atıyoruz
- Sağ taraftan attığımızda ilgilendiğimiz Z değerinin 1.645 olduğunu, sol taraftan attığımızda ise bunun

simetriği olan -1.645 olacağını bulabiliriz

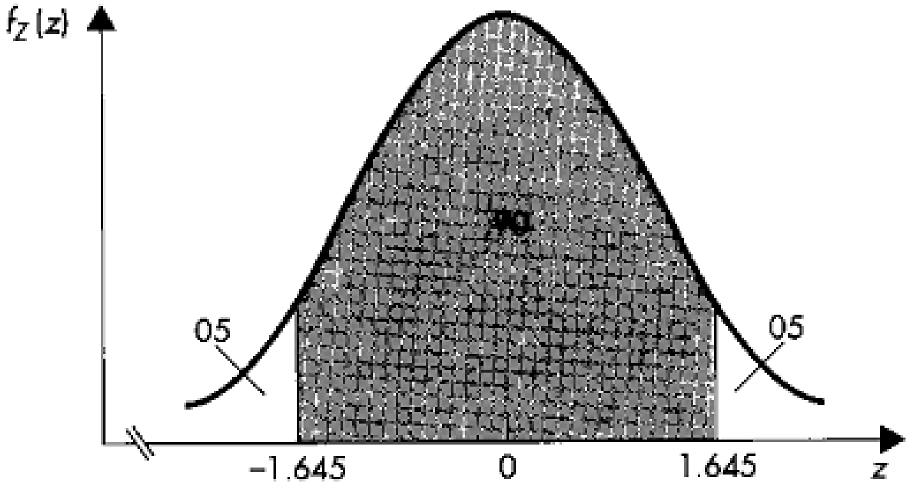


FIGURE 8.1 $P(-1.645 < Z < 1.645) = .90$, where Z is a standard normal random variable

- Artık Z değerleri kullanılarak X dağılımdaki %90 güven aralığı bulunabilir
- Öncelikle bu örneklem dağılının standart normale şu şekilde çevrildiğini hatırlayalım

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Dolayısıyla

$$0.90 = P(-1.645 < Z < 1.645)$$

$$-1.645 < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.645$$

$$-\frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Örnek: Standart sapması 6 olan bir normal dağılımdan seçilmiş 16 elemanlı bir örneklemin ortalaması 25 ise populasyon ortalamasının %90 güven aralığını bulalım

- Verilenler: $\bar{x} = 25 \quad \sigma = 6 \quad n = 16$
  - %90 güven aralığı

$$\bar{x} - \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}$$

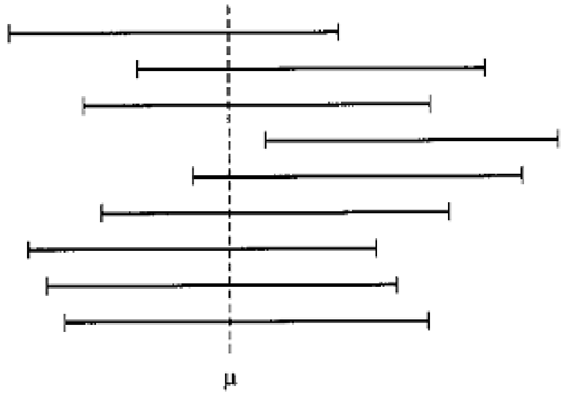
dolayısıyla

$$25 - \frac{1.645 * 6}{\sqrt{16}} < \mu < 25 + \frac{1.645 * 6}{\sqrt{16}}$$

son olarak

$$22.5 < \mu < 27.5$$

- Güven aralığı örneklemin ortalaması kullanılarak hesaplanır. Dolayısıyla farklı örneklemler kullanıldığında (μ) için aşağıdaki gibi güven aralıkları elde edilebilecektir



(b) Some 90% confidence intervals for the population mean

FIGURE 8.2 Interpretation of a 90% confidence interval

- Görüldüğü gibi bu güven aralıklarının çoğu (yeterince tekrarlandıklarında %90'ı) μ'yü içermektedir
- Güven aralıklarının genel şekli

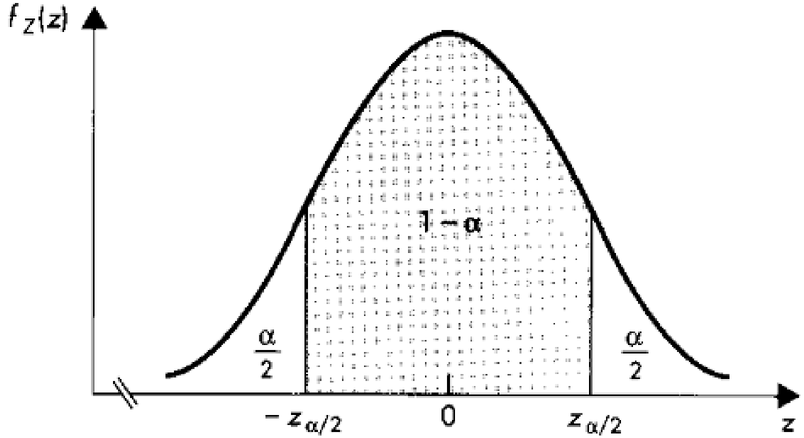


FIGURE 8.4 $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$, where Z is a standard normal random variable

- %90'un dışında en çok kullanılan güven aralıkları %95 ve %99'dur
- Bunlar için α değerleri sırasıyla %5 ve %1
- z değerleri ise

$$F(z_{\alpha/2}) = F(z_{0.025}) = 1.96$$

$$F(z_{\alpha/2}) = F(z_{0.005}) = 2.575$$

- Örnek: Ufak toz şeker paketlerinin ağırlığının normal dağıldığını ve standart sapmalarının 1.2 gr olduğunu kabul edelim. Rassal bir şekilde seçilmiş 25 tane şeker paketinin ortalama ağırlığının 19.8 gr olsun. Üretilen tüm toz şeker paketlerinin ortalama ağırlığı için %95 güven aralığını bulunuz
  - Soruda verilenler: $\bar{x} = 19.8 \quad \sigma = 1.2 \;\; n = 25$
  - Ayrıca: $100(1 - \alpha) = 0.95 \;\Rightarrow\; \alpha = 0.05$

– Bu ise kenarlardan %2.5'lik bir kısım atmayı gerektirir

$$F(z_{.025}) = .975 \quad \Rightarrow \quad z_{.025} = 1.96$$

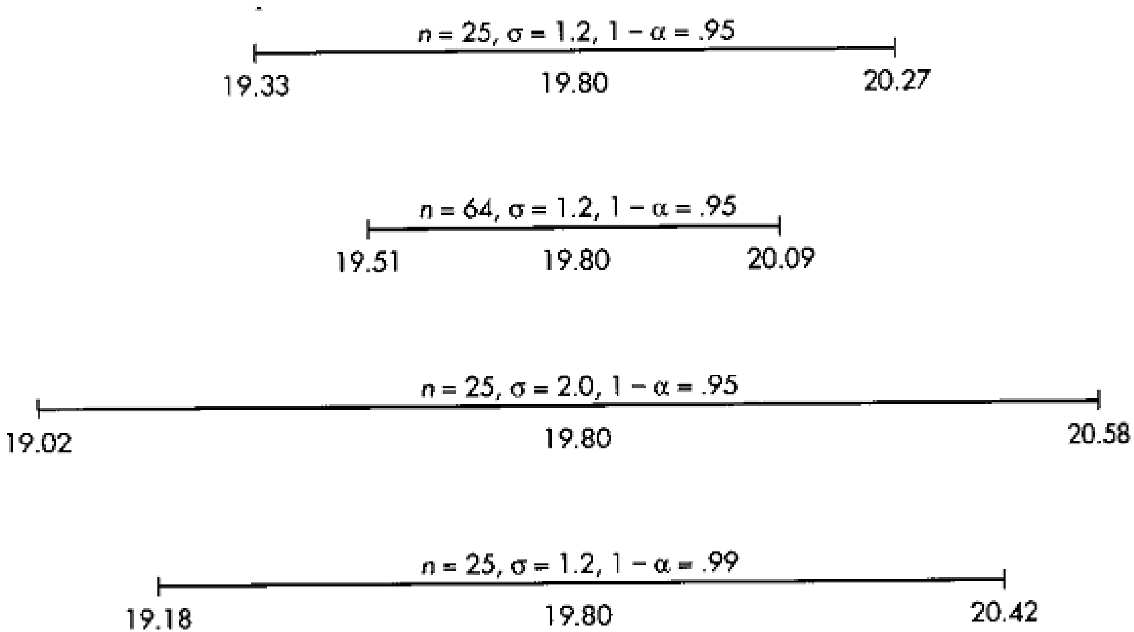
– Dolayısıyla populasyon ortalaması μ'nın %95 güven aralığı

$$\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$19.8 - \frac{1.96 \cdot 1.2}{\sqrt{25}} < \mu < 19.8 + \frac{1.96 \cdot 1.2}{\sqrt{25}}$$

$$19.33 < \mu < 20.27$$

– Eğer bu güven aralığı üzerinde sorudaki verilerin değişiminin etkisini incelersek



Confidence Interval Estimation for the Mean of a Normal Distribution: Population Variance Unknown: The t Distribution

- For a random sample from a normal pupulation with mean μ and variance σ^2, the random variable $\bar{X}$ has a normal distribution with mean μ and variance σ^2/n; i.e.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

has the standard normal distribution.

- But if σ is unknown, usually sample estimate is used;

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s_x/\sqrt{n}}$$

In this case the random variable t follows the *Student's t distribution* with $(n-1)$ degrees of freedom

- A random variable having the Student's t distribution with ν degrees of freedom will be denoted t_ν. Then $t_{\nu,\alpha}$ is the number for which

$$P(t_\nu > t_{\nu,\alpha}) = \alpha$$

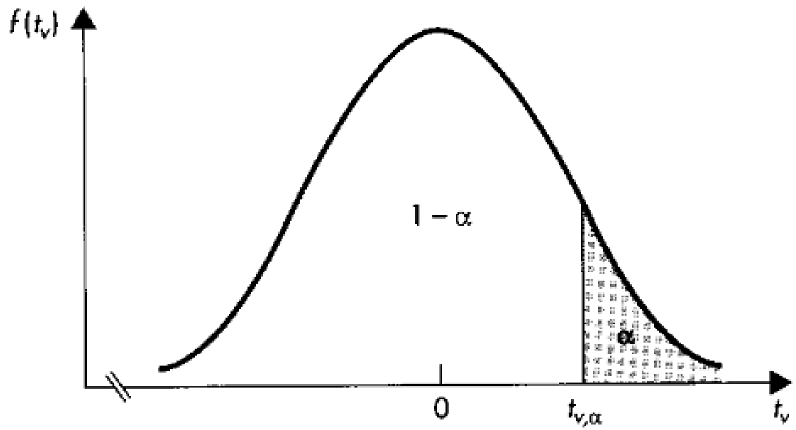
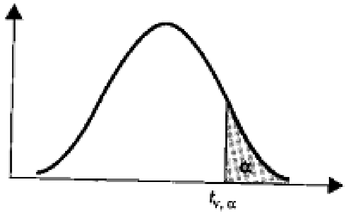


TABLE 6 Cutoff points for the Student's t distribution



For selected probabilities, α, the table shows the values $t_{\nu,\alpha}$ such that $P(t_\nu > t_{\nu,\alpha}) = \alpha$, where t_ν is a Student's t random variable with ν degrees of freedom. For example, the probability is .10 that a Student's t random variable with 10 degrees of freedom exceeds 1.372.

ν	α				
	.100	.050	.025	.010	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	[illegible]	[illegible]

- A $100(1-\alpha)\%$ confidence interval for the population mean, variance unknown, given by

$$\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2} * \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

- Örnek: Rassal bir şekilde seçilmiş 6 arabanın galon/mil cinsinden yakıt tüketimlerişu şekildedir: 18.6, 18.4, 19.2, 20.8, 19.4 ve 20.5. Eğer bu arabaların seçildiği populasyona ait arabaların yakıt tüketimi normal dağılıyorsa, bu populasyonun ortalama yakıt tüketimi için %90 güven aralığını bulunuz

  – Populasyon varyansı verilmediğinden önce örneklem varyansını hesaplayıp önceki sayfadaki formülü kullanabiliriz. Örneklem varyans için

i	x_i	x_i^2
1	18.6	345.96
2	18.4	338.56
3	19.2	368.64
4	20.8	432.64
5	19.4	376.36
6	20.5	420.25
Sums	116.9	2,282

- Dolayısyla örneklem ortalaması

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{116.9}{6} = 19.5$$

örneklem varyansı

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}{n-1} = \frac{2282^2 - 6 * 19.5^2}{5} =$$

ve standart sapması

$$s_x = \sqrt{.96} = .98$$

- Aradığımız güven aralığı

$$\bar{x} - \frac{t_{n-1,\alpha/2} * s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{t_{n-1,\alpha/2} * s_x}{\sqrt{n}}$$

where $n = 6 \quad \alpha/2 = .10/2 = .05 \quad \Rightarrow \quad t_{5,.05} =$ 2.015

$$19.48 - \frac{2.015 * .98}{\sqrt{6}} < \mu < 19.48 + \frac{2.015 * .98}{\sqrt{6}}$$

dolayısıyla

$$18.67 < \mu < 20.29$$

- Örnek: Bir sektördeki şirket birleşmelerinin şirket kârlarına etkisi incelendiğinde, örneklem olarak seçilmiş 17 tane birleşmiş şirketin kârlılığının artışının ortalaması %17, standart sapması da .440 olmuştur. Toplam şirket populasyonunun kârlılığının normal dağıldığını varsayarsak, bu dağılımın ortalaması için %95 güven aralığı nedir?

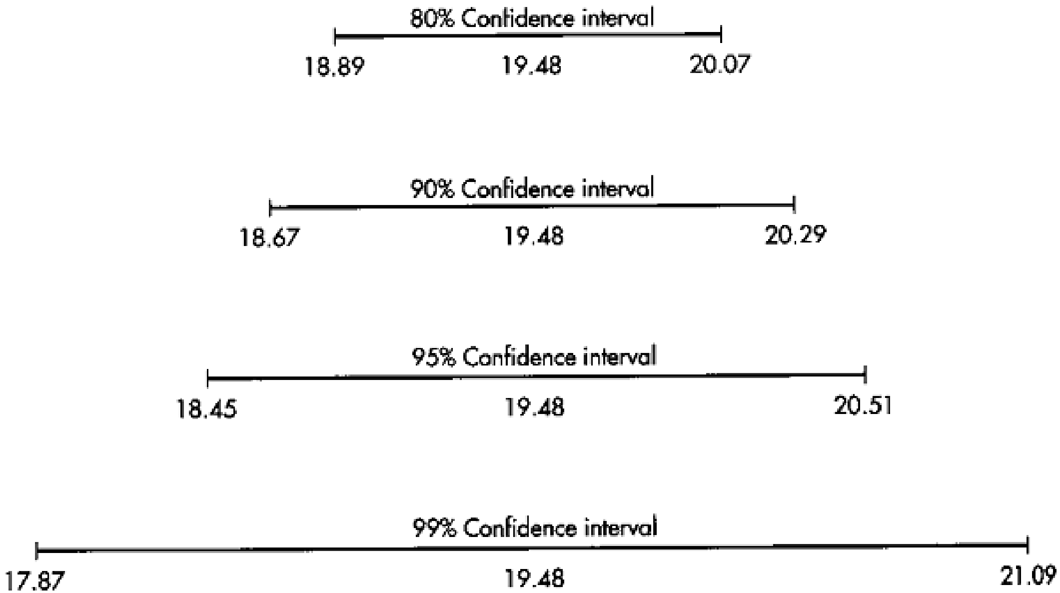
$$\bar{x} - \frac{t_{n-1,\alpha/2} * s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{t_{n-1,\alpha/2} * s_x}{\sqrt{n}}$$

where $n = 17 \quad \alpha/2 = .05 \quad t_{16,.025} = 2.12$

$$.105 - \frac{2.12 * .44}{\sqrt{17}} < \mu < .105 + \frac{2.12 * .44}{\sqrt{17}}$$

$$-.121 < \mu < .331$$

- Farklı güven aralıklarının sonucu ise aşağıdaki gibidir. Bu sayıları çıkarmaya çalışarak alıştırma yapabilirsiniz



Confidence Interval Estimation for Population Proportion (Large Samples)

- Bir populasyondan seçilecek n elemanlı bir örneklemdeki başarı ya da tekrar olayını $\hat{p}_x$ ile, populasyondaki başarı ihtimalini de P ile gösterdiğimizde, aşağıdaki rassal değişkenin standart normal dağılacağından bahsetmiştik

$$Z = \frac{\hat{p} - E(\hat{p})}{\sigma_{\hat{p}}}, \text{ where } E(\hat{p}) = P, \; \sigma^2_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

- Eğer yukarıda P bilinmez ve örneklem sayısı yeterince fazla ise $(n \cdot p \cdot (1-p) > 5)$, yaklaşık olarak sağlanacak şu eşitlik kullanılır

$$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \simeq \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ve aşağıdaki değişkenin de standart normal dağıldığı kabul edilir

$$Z = \frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}}$$

- $100(1-\alpha)\%$ coınfidence interval for the population proportion can be obtained as

$$1-\alpha = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2})$$

$$= P(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} < z_{\alpha/2})$$

which finally implies that

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < P < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}_x}{n}}$$

- Örnek: Şirketlere eleman alımı için yeni mezun olmuş öğrencilerle görüşen 142 kişiye, öğrencilerinin notlarının işe alımlarında ne derece etkili olduğu sorulmuştur. 87 tanesi çok önemli olduğunu belirtmiştir. Aynı soru benzer işi yapan tüm kişilere sorulsa (populasyon), bu 87 kişiyle aynı şekilde düşünenlerin oranının %95 güven aralığını hesaplayınız

– Kullanacağımız formül

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}} < P < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

– $\hat{p} = 87/142 = .613 \quad z_{\alpha/2} = z_{.025} = 1.96$

$$.613 - 1.96\sqrt{\frac{.613 * .387}{142}} < P < .613 + 1.96\sqrt{\frac{.613 * .3}{142}}$$

$$.533 < P < .693$$

- Örnek: 344 kişilik bir örneklemde, 83 kişi bir soruya evet cevabını vermiştir. Populasyondaki insanların tümüne bu soru sorulsa evet cevabı verenlerin yüzdesini içerebilecek %90 güven aralığını bulunuz

- Kullanacağımız formül

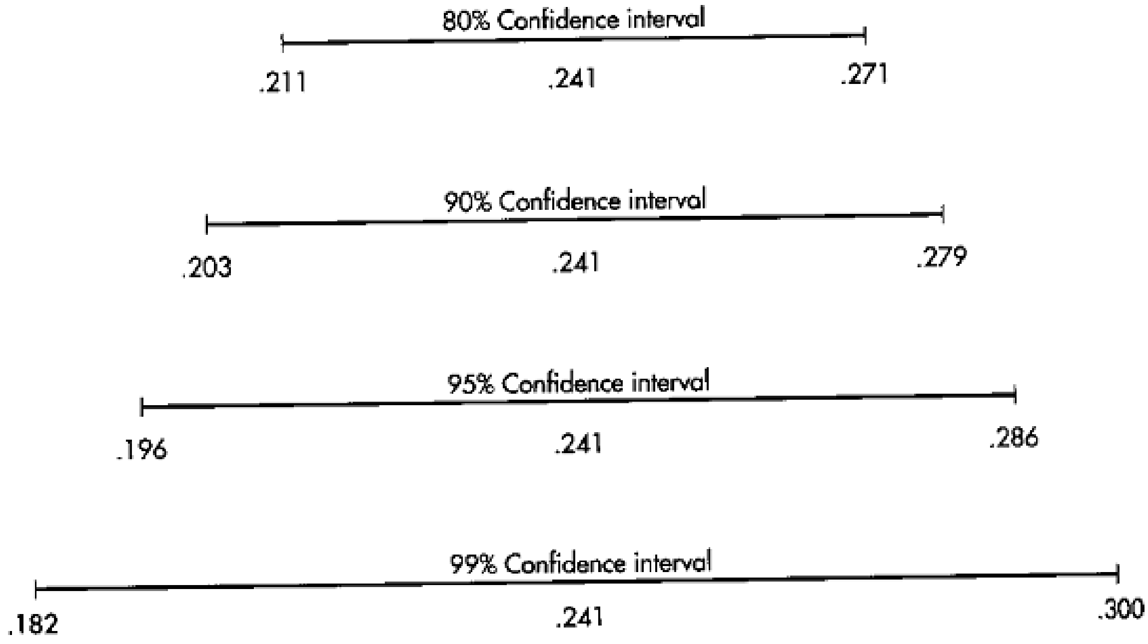
$$\hat{p}_x - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < P < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

- $\hat{p} = 83/344 = .241 \qquad z_{\alpha/2} = z_{.05} = 1.645$

$$.241 - 1.645\sqrt{\frac{.241 * .759}{344}} < P < .241 + 1.645\sqrt{\frac{.241 * .7}{344}}$$

$$.203 < P < .279$$

– Aşağıdaki farklı güven aralıklarının sonucunu kendiniz çıkarmayı deneyebilirsiniz



Confidence Interval Estimation for the Variance of a Normal Distribution

- As we have seen before, if a random sample of n observations from a normally distributed population with variance σ^2 and sample variance s^2 is taken, the random variable

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

follows a χ^2 (chi-square) distribution with $n-1$ degrees of freedom.

- Let's we define $\chi^2_{n-1,\alpha}$ as the number for which

$$P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1,\alpha}) = \alpha$$

it can also be shown by the following figure

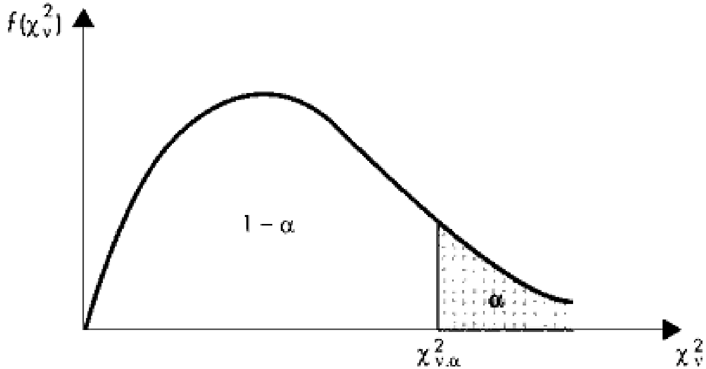


FIGURE 8.11 $P(\chi_\nu^2 > \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$, where χ_ν^2 is a chi-square random variable with ν degrees of freedom

- Örnek: 6 serbestlik derecesi olan bir Ki-kare dağılımının %95'inden büyük olan sayı nedir?
  - Sorulan

$$P(\chi^2_6 > \chi^2_{6,.05}) = .05$$

  - Cevap

$$\chi^2_{6,.05} = 12.59$$

- Örnek: Daha önce basedilen 6 serbestlik dereceli ki-kare dağılımı için bu dağılımın ortalamasının etrafındaki %90'ını içeren sayı çiftini bulalım

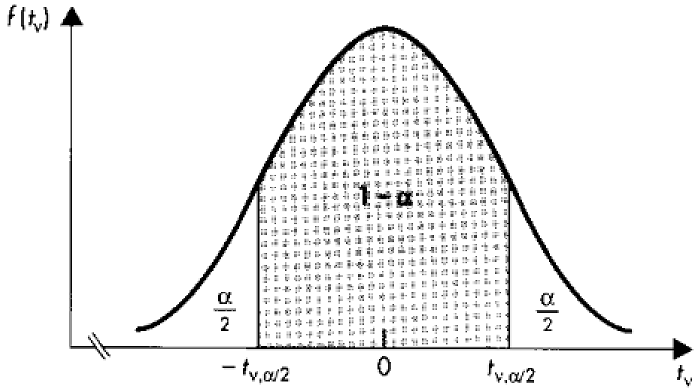


FIGURE 8.8 $P(-t_{\nu,\alpha/2} < t_\nu < t_{\nu,\alpha/2}) = 1 - \alpha$, where t_ν is a Student's t random variable with ν degrees of freedom

– İlk önce α değeri

$$1 - \alpha = 0.9 \qquad \alpha = 0.1$$

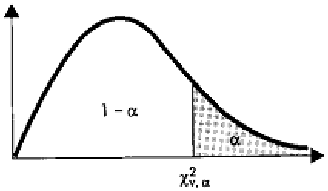
– dolayısıyla

$$P(\chi^2_{6,.95} < \chi^2_6 < \chi^2_{6,.05}) = 0.9$$

– ve istenilen değer

$$P(\chi^2_{6,.95}) = 1.64 \quad \text{and} \quad \chi^2_{6,.05} = 12.59$$

TABLE 5 Cutoff points of the chi-square distribution function



For selected probabilities α, the table shows the values $\chi^2_{\nu,\alpha}$ such that $\alpha = P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\nu,\alpha})$, where χ^2_ν is a chi-square random variable with ν degrees of freedom. For example, the probability is .100 that a chi-square random variable with 10 degrees of freedom is greater than 15.99.

ν	α									
	.995	.990	.975	.950	.900	.100	.050	.025	.010	.005
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95

- Suppose there is a random sample of n observations from a normal distribution with unknown variance, σ^2. If the observed sample standart deviation is s, then the $100(1-\alpha)\%$ confidence interval for the population variance is given by

$$1-\alpha = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right)$$

- Örnek: Ağrı kesici ilaçların 15 elemanlı bir örnekleminde aktif madde içeriği %8 standart sapma göstermiştir. Bu ilaçların populasyonunun varyansının %90'lık güven aralığını bulunuz

$$\frac{(n-1)s_X^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_X^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$$

$$\frac{14 * .8^2}{23.68} < \sigma^2 < \frac{14 * .8^2}{6.57}$$

$$.378 < \sigma^2 < 1.364$$

Confidence Interval Estimation: Finite Populations

- Bu chapter boyunca analizini yaptığımız bir çok konu için arka planda yaptığımız bir kabullenme vardı. Bu da populasyona oranla örneklemdeki eleman sayısının populasyonun tümüne göre küçük olduğuydu ($n < 0.05N$). Eğer bu koşul sağlanmazsa örneklemlerin birbirinden bağımsız dağıldığını varsayamayız ve yukarıdaki pek çok formülde bir düzeltme geretir. Burada bunun detayına girmiyoruz