TOBB-ETÜ, İktisat Bölümü - İstatistik (İKT 253)

2. Çalışma Soruları - Cevaplar

4. CHAPTER (PROBABILITY METHODS - OLASILIK METODLARI)

Soru 1: Bir torba içinde 4 mavi, 4 tane de kırmızı bilye olsun. 4 kırmızı bilyeden 2 sinin parlak renkte olduğunu da biliyoruz. A olayı rastgele seçilen bir bilyenin mavi renkli olması, B olayı da rastgele seçilen bir bilyenin 2 parlak bilyeden biri gelmesi olsun.

a-) Rastgele seçilen bir bilyenin mavi renkli olma olasılığı, yani $P(A) = ?$

$$S = \{M, M, M, M, KP, KP, K, K\}$$

$$A = \{M, M, M, M\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 4/8$$

b-) $P(B) = ?$

$$B = \{KP, KP\} \quad \Rightarrow \quad P(B) = 2/8$$

c-) Rastgele seçilen bir bilyenin mavi ya da parlak renkli olma olasılığı, yani $P(A \cup B) =?$

$$A{\cup}B = \{M, M, M, M, KP, KP\} \;\; \Rightarrow \;\; P(A{\cup}B) = 6/8$$

d-) $P(A \cap B) =?$

$$A \cap B = \{\phi\} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0$$

Soru 2 (Combination-Kombinasyon): Bir öğrenci komitesinde 4 lisans ve 2 lisansüstü öğrenci vardır. Bu 6 öğrenciden rastgele seçilen 3 tanesinde,

a-) Hiç lisansüstü öğrenci olmaması ihtimali nedir?

6 öğrenciden 3 öğrencinin kaç farklı şekilde seçilebileceği:

$$C_3^6 = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 20$$

Hiç lisansüstü öğrenci yoksa tüm öğrenciler lisans öğrencisidir. Dolayısıyla 4 lisans öğrencisinden 3 öğrenci $C_3^4 = 4$ şekilde seçilebilir. Son olarak

$$P(a) = \frac{C_3^4}{C_3^6} = \frac{4}{20} = 0.2$$

b-) İki lisans bir tane de lisansüstü öğrenci bulunması ihtimali nedir?

$$P(b) = \frac{C_2^4 C_1^2}{C_3^6} = \frac{6 \cdot 2}{20} = 0.6$$

c-) En az iki lisans öğrencisi olma ihtimali nedir?

$$P(c) = \frac{C_2^4 C_1^2}{C_3^6} + \frac{C_3^4}{C_3^6} = 0.8$$

Soru 3 (Conditional Probability-Şartlı Olasılık):
Bir şirkette çalışan işçilerden %40'ı okuma kurslarına, %50'si matematik kurslarına, okuma kurslarına gidenlerin %30'u ise hem okuma hem matematik kurslarına gitmektedir

a-) Rastgele seçilen bir işçinin iki kursa da gitme ihtimali nedir?

b-) Rastgele seçilen ve matematik kursuna gittiği bilinen bir işçinin okuma kursuna da gidiyor olması?

c-) Rastgele seçilen bir işçinin iki kurstan en az birine gidiyor olma ihtimali nedir?

d-) Okuma kursuna gitme ve matematik kursuna gitme olayları birbirinden bağımsızlar mıdır?

1. Yol) Soruları çözmeye başlamadan önce aşağıdaki gibi bir tablo hazırlayıp bilinmeyenleri bulabiliriz:

	Okuma Var	Okuma Yok	Toplam
Matematik Var	.4*.3	x	.5
Matematik Yok	y	z	t
Total	.4	u	1.0

Bu tablodan bulabiliriz ki: $x = 0.38$, $y = 0.28$, $u = 0.6$, $z = 0.22$, $t = 0.5$

2. Yol) Sorudaki bilgileri formülize edebiliriz:

$$P(Okuma) = 0.4$$

$$P(Matematik) = 0.5$$

$$P(Matematik|Okuma) = 0.3$$

a-) Rastgele seçilen bir işçinin iki kursada gitme ihtimali nedir?

$$P(Okuma \cap Matematik)$$

$$= P(Matematik|Okuma) * P(Okuma) = 0.12$$

b-) Rastgele seçilen ve matematik kursuna gittiği bilinen bir işçinin okuma kursuna da gidiyor olması?

$$P(Okuma|Matematik)$$

$$= P(Okuma \cap Matematik)/P(Matematik) =$$

$$= 0.12/0.5 = 0.24$$

c-) Rastgele seçilen bir işçinin iki kurstan en az birine gidiyor olma ihtimali nedir?

$$P(Okuma \cup Matematik)$$
$$= P(Okuma) + P(Matematik)$$
$$-P(Okuma \cap Matematik)$$
$$= 0.4 + 0.5 - 0.12 = 0.78$$

(ya da $0.12 + x + y = 0.12 + 0.38 + 0.28 = 0.78$)

d-) Okuma kursuna gitme ve matematik kursuna gitme olayları birbirinden bağımsızlar mıdır?

$P(Okuma) = 0.4 \quad\quad P(Matematik) = 0.5$

$$\Rightarrow \quad P(Okuma) * P(Matematik) = 0.2$$

$P(Okuma) \cap Matematik) = 0.12$

$P(Okuma) \cap Matematik) \neq P(Okuma) * P(Matematik$

$$\Rightarrow \quad \text{bağımsız değillerdir}$$

Soru 4 (Bayes Theorem-Bayes Teoremi): Bir yedek parça üreticisi bu iş için 2 makina kullanmaktadır. Üretici bir süre sonra farketmiştir ki parçaların %40'ını üreten makina, ürettiği parçaların %10'unu hatalı üretmiştir. 2. makina ise problemsiz üretim yapabilmiştir. Üretilen tüm parçalar içinden rastgele seçilen 'hatasız' bir ürünün, diğer makina tarafından üretilmiş olma ihtimali nedir?

$$P(Hatalı|1.Makina) = 0.1$$

$$P(Hatalı|2.Makina) = 0$$

$$P(1.Makina) = 0.4$$

$$P(2.Makina) = 0.6$$

$$P(2.Makina|Hatasız)$$

$$= \frac{P(Hatasız|2.Makina)P(2.Makina)}{P(Hatasız)}$$

$$= \frac{P(Hatasız|2.)P(2.)}{P(Hatasız|1.)P(1.) + P(Hatasız|2.)P(2.)}$$

$$= \frac{1 * 0.6}{0.9 * 0.4 + 1 * 0.6} = 0.63$$

5. CHAPTER (DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS - SÜREKSİZ OLASILIK DAĞILIMLARI)

Soru 5 (Expectation-Beklentiler): Aşağıdaki tablo bir dersi 1'den 5'e kadar değerlendiren öğrencilerin toplam öğrenci sayısı içindeki yüzdesidir

Değerlendirme:	1	2	3	4	5
Yüzde:	.07	.19	.28	.30	.16

Bu değerlendirmelerin ortalamasını (beklenen değerini) ve varyasyonunu bulunuz

$$E(X) = \mu_X = \sum_x xP(x) = 1 \cdot 0.07 + 2 \cdot 0.19$$
$$+3 \cdot 0.28 + 4 \cdot 0.30 + 5 \cdot 0.16 = 3.29$$

$$var(X) = E[(X-\mu)^2] = (1-3.3)^2 \cdot 0.07$$
$$+(2-3.3)^2 \cdot 0.19 + (3-3.3)^2 \cdot 0.28$$
$$+(4-3.3)^2 \cdot 0.30 + (5-3.3)^2 \cdot 0.16 = 1.33$$

ya da

$$var(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= 1^2 \cdot 0.07 + 2^2 \cdot 0.19 + 3^2 \cdot 0.28 + 4^2 \cdot 0.30$$
$$+5^2 \cdot 0.16 - 3.3^2 = 1.33$$

Soru 6 (Joint Distribution - Birleşik Dağılım): Bir emlak acentesi, egazeteye verdiği emlak ilanlarının satır sayısı ile, bu emlaklarla ilgilenen kişi sayısı arasında bir ilişki kurmaya çalışmaktadır.

Emlaklarla ilgilenen kişi sayısı X değişkeni ile gösterilsin ve X=0 çok az kişiyi, X=1 ortalama denebilecek miktarda kişiyi, ve X=2'de çok fazla kişiyi göstersin. Benzer şekilde satır sayısı değişkeni Y ile gösterilsin ve Y=3 üç satır ilanı, Y=4 dört satır ilanı, ve Y=5'de beş satır ilanı göstersin.

Aşağıdaki tablo bu iki birleşik dağılan değişkenin olasılık dağılım fonksiyonunu göstermektedir

Satır Sayısı (Y)	Arayan Kişi Miktarı (X)		
	0	1	2
3	.09	.14	.07
4	.07	.23	.16
5	.03	.10	.11

a-) X=1'in marginal dağılımını (marginal distribution) bulunuz, ve yorumlayınız

$$P(X = 1) = \sum_y f(x, y)$$

$$P(X = 1) = .14 + .23 + .10 = .47$$

b-) X=1 iken Y'nin şartlı dağılım 'fonksiyonunu' (conditional distribution function) bulunuz

$$P(Y = 3|X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 3)}{P(X = 1)} = \frac{.14}{.47}$$

$$P(Y = 4|X = 1) = \frac{.23}{.47}$$

$$P(Y = 5|X = 1) = \frac{.10}{.47}$$

c-) X ile Y değişkenleri arasındaki kovaryasyonu bulup yorumlayınız

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$= \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y)P(x,y)$$

$$E(X) = \sum_x xP(x) = 0 * (.09 + .07 + .03)$$

$$+1 * (.14 + .23 + .10) + 2 * (.07 + .16 + .11) = 1.15$$

$$E(Y) = \sum_y yP(y) \;\; = 3 * (.09 + .14 + .07)$$

$$+4 * (.07 + .23 + .10) + 5 * (.03 + .10 + .11) = 3.94$$

$$Cov(X, Y) = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y)P(x, y)$$

$$= (0 - 1.15) * (3 - 3.94) * 0.09 + ... = 0.5$$

d-) X ile Y birbirlerinden bağımsızlar mıdır? Çıkan sonucu da **c-)** şıkkının sonucu ile karşılaştırınız.

$$P(X = 0) = 0.19 \qquad P(Y = 3) = 0.3$$
$$P(X = 0, Y = 3) = 0.09 \neq P(X = 0) * P(Y = 3)$$

dolayısıyla bu iki değişken bağımsız değillerdir. Zaten 0'dan farklı bir kovaryasyon değeri de bağımsız olmadıklarını gösteriyordu.