

TOBB-ETÜ, İktisat Bölümü
İstatistik (İKT 253)

3. Çalışma Soruları - Cevaplar

5. CHAPTER (DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS - SÜREKSİZ OLASILIK DAĞILIMLARI)

Soru 1 : Bir mağazaya gelen herhangi bir müşterinin mağazadan ürün alma ihtimali 0.4 olsun

a-) (The Bernoulli Distribution) Müşteri mağazadan ürün aldığı zaman 1 değerini alan, almadığı zaman ise 0 değerini alan bir X rassal değişkeni tanımlayıp, bunun ortalamasını ve varyasyonunun bulunuz

$$P(X) = \left\{ \begin{array}{ll} 0.4, & x = 1 \text{ ise} \\ 0.6, & x = 0 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$$

Burada kazanma ihtimali $\theta = 0.4$ olduğu için:

$$E(X) = \theta = 0.4$$

$$Var(X) = \theta(1 - \theta) = 0.4 * 0.6 = 0.24$$

Uzun yolla ise;

$$E(X) = \sum_x xP(x) = 0 * (0.6) + 1 * (0.4) = 0.4$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2P(x) = 0^2 * (0.6) + 1^2 * (0.4) = 0.4$$

$$\Rightarrow Var(X) = 0.4 - 0.4^2 = 0.24$$

b-) (Geometric Distribution) Mağazaya gelen 1. müşterinin ürün almaması ve 2. müşterinin ürün alması ihtimalini bulunuz

$$P(X = 1) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$$

c-) (Geometric Distribution) Mağazaya ard arda gelen 3 müşterisinde ürün almaması ihtimalini bulunuz

$$0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.216$$

d-) (Geometric Distribution) Mağazanın ilk ürünü en çok 3. müşteriye satma ihtimalini bulunuz

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0.4 + 0.6 \cdot 0.4 + 0.6^2 \cdot 0.4 \end{aligned}$$

e-) (Binomial Distribution) Mağazaya gelen 4 kişiden 3'ünün ürün alma ihtimalini bulunuz?

$$\begin{aligned} P(x; n, \theta) &= \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} \\ \Rightarrow P(3; 4, 0.4) &= \binom{4}{3} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6 \end{aligned}$$

f-) (Binomial Distribution) Mağazayı 4 kişi ziyaret ettiği zaman ortalama kaç ürünün satılabileceğini, ve bunun varyasyonunu bulunuz

$$\mu = n\theta = 4 * 0.4 = 1.6 \quad \text{and} \quad \sigma^2 = n\theta(1 - \theta) = 4 * 0.4 * 0.6 = 0.48$$

g-) (Geometric and Binomial Distribution) Mağazaya gelen ilk 3 kişinin ürün almaması, sonraki gelen 4 kişiden 3'ünün ürün alması ihtimalini bulunuz?

$$0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot P(3; 4, 0.4) = 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot \binom{4}{3} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6$$

h-) (Negative Binomial Distribution) Mağazaya gelen 3. kişinin, bu 3 kişiden 2. ürün alan kişi olması ihtimalini bulunuz?

$$P^*(x; k, \theta) = \binom{x-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^{x-k}$$
$$\Rightarrow P(3; 2, 0.4) = \binom{2}{1} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6$$

Bu sefer mağazaya gelen her 1000 kişiden 2'sinin ürün aldığını varsayalım ve aşağıdaki soruyu, mağazayı 300 kişinin ziyaret etmiş olduğu durumda poisson dağılımını kullanarak bulalım

i-) (Poisson Distribution) Bu 300 kişiden en fazla 1 kişinin ürün alma ihtimalini hesaplayınız

$n=300$ ve $\theta=0,002$ olduğundan $\lambda = n\theta = 0.6$

$$\begin{aligned} p(X = 0) + p(X = 1) &= p(0; 0.6) + p(1; 0.6) \\ &= \frac{0.6^0 e^{-0.6}}{0!} + \frac{0.6^1 e^{-0.6}}{1!} \end{aligned}$$

Not: Yukarıdakilerde bir sonucun oluşum ihtimali ondan bir öncekilerden bağımsız. Yani bir müşterinin ürün alıp almaması ondan bir önceki müşterinin ürün alıp almamasına bağlı değil. Hypergeometric dağılımda ise durum farklı. Bu dağılıma örnek olarak geçen haftanın sorularından biri olan içinde 4 mavi 2 kırmızı bilye bulunan bir torbadan 2 bilye seçildiğinde ilkinin mavi, ikincisinin kırmızı olması verilebilir. Zira burada 2. bilye seçilirken sadece 5 bilye kalmış durumda torba'da. Onun da kırmızı olma ihtimali $2/5$, yan $2/6$ değil.

Soru 2: Bir mağazaya saatte ortalama 15 müşterinin geldiğini, ve gelen müşterilerin zamanla dağılımının Poisson olduğunu kabul ediniz. 1 saatte 15'den fazla müşteri gelmesi olasılığını bulunuz

$$\lambda = 15 \text{ müşteri/saat}$$

$$\begin{aligned} & p(X = 16) + p(X = 17) + p(X = 18) + \dots \\ &= 1 - p(X = 0) - p(X = 1) - \dots - p(X = 15) \\ &= 1 - \frac{15^0 e^{-15}}{0!} - \frac{15^1 e^{-15}}{1!} - \dots - \frac{15^{15} e^{-15}}{15!} \end{aligned}$$

Soru 3: 50 tanesinden 25 tanesinde hata bulunan üründen seçilen 20 tanesinde 7 hatalı ürün bulunma olasılığı nedir?

$$N=50, \quad S=25, \quad n=20, \quad x=7$$

$$P(x) = \frac{C_x^S C_{n-x}^{N-S}}{C_n^N} = \frac{C_7^{25} C_{13}^{25}}{C_{20}^{50}}$$

6. CHAPTER (CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTIONS - SÜREKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI)

Soru 4 (Normal Distribution): Bir yatırım portföyü çeşitli şirketlerin hisse senetlerinden oluşmaktadır. Son bir yılda bu hisse senetlerinin getirileri; ortalaması %12.2, standart sapması da %7.2 olan bir normal dağılım göstermiştir.

a-) Bu hisselerin yüzde kaçı %20'den fazla getiri sağlamıştır?

$$\begin{aligned} P(0.2 < X) &= P\left(\frac{0.2 - 0.122}{0.072} < Z\right) \\ &= P(1.08 < Z) = 1 - F(1.08) = 0.14 \end{aligned}$$

b-) Bu hisselerin yüzde kaçı negatif getiri sağlamıştır?

$$\begin{aligned} P(X < 0) &= P\left(Z < \frac{0 - 0.122}{0.072}\right) \\ &= P(Z < -1.69) = 1 - F(1.69) = 0.05 \end{aligned}$$

c-) Bu hisselerin yüzde kaçı %5 ila %15 arasında getiri sağlamıştır?

$$\begin{aligned} & P(0.05 < X < 0.15) \\ &= P\left(\frac{0.05 - 0.122}{0.072} < Z < \frac{0.15 - 0.122}{0.072}\right) \\ &= P(-1 < Z < 0.38) = F(0.38) - (1 - F(1)) \\ &= 0.648 - (1 - 0.8413) = 0.49 \end{aligned}$$

d-) Şirket hisselerinin sadece en yüksek getiren %20sini kapsayacak taban hisse getirisi kaçtır?

$$1 - F(Z) = 0.2$$

$$F(Z) = 0.8$$

$$Z = 0.84$$

$$0.84 = \frac{X - 0.122}{0.072}$$

$$X = 18.2$$

Soru 5 (Normal Distribution): Bir şirket ihtiyacı olan ara malı iki tane tedarikçiden sağlayabilmektedir. Şirket satın aldığı mallarda %5'den fazla hata istemiyor, ve tedarikçilerin de sattıkları mallardaki hata oranı, ortalaması ve standart sapması aşağıdaki gibi olan normal dağılıma sahipse, şirketin aynı fiyat koşullarında hangi tedarikçiden mal alacağı daha olasıdır?

	Ortalama	Standart Sapma
1. Tedarikçi	4.4	.4
2. Tedarikçi	4.2	.6

$$P(Z < \frac{5 - 4.4}{0.4}) = F(Z < 1.5)$$

$$P(Z < \frac{5 - 4.2}{0.6}) = F(Z < 1.3)$$

Görüldüğü üzere 1. tedarikçi için %5'in altında hata verme ihtimali daha yüksek olacaktır. Dolayısıyla şirket bu tedarikçiden mal alımını seçer

Soru 6 (Exponential Distribution): Bir profesör sınıfındaki öğrencilerinin sorularını ofis saatinde cevaplıyor, ve öğrencilerle konuşma süresi ortalaması 10 dakika olan exponensiyel bir dağılım gösteriyorsa

a-) Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin dersin hocasıyla 20 dakikadan az görüşme olasılığı nedir?

Profesörün dakikada konuştuğu ortalama öğrenci sayısı: $\lambda = 1/10$

$$P(\text{beklemesüresi} < 20) = 1 - e^{-\lambda t_0} = 1 - e^{-1/10 * 20}$$

b-) Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin dersin hocasıyla 10 dakikadan fazla ama 25 dakikadan az görüşme olasılığı nedir?

$$\begin{aligned} P(10 < \text{beklemedüresi} < 25) \\ &= (1 - e^{-1/10*25}) - (1 - e^{-1/10*10}) \\ &= e^{-1} - e^{-2.5} = 0.29 \end{aligned}$$

c-) b şikkındaki soruyu Poisson dağılımını kullanarak çözmeye çalışınız

$\lambda = 10$ öğrenci/dakika ise 25 dakikada 2.5 öğrenci olur ortalamada

$$\begin{aligned} P(10 < \text{beklemesüresi} < 25) \\ &= \left(1 - \frac{2.5^0 e^{-2.5}}{0!}\right) - \left(1 - \frac{1^0 e^{-1}}{0!}\right) \\ &= e^{-1} - e^{-2.5} = 0.29 \end{aligned}$$