

TOBB-ETÜ, İktisat Bölümü
İstatistik (İKT 253)

5. Çalışma Soruları - Cevaplar

**10. CHAPTER (HYPOTHESIS TESTS
OF A SINGLE POPULATION)**

Soru 1 (Tests of the Mean of a Normal Distribution: Population Variance Known): Bir firma satın alacağı akülerin ömrünün en az 50 saat olmasını istemektedir. Bu amaçla satın almadan önce 9 tanesini test etmiştir ve ortalama dayanım süreleri 48.2 saat çıkmıştır. Firma ayrıca bu dayanım sürelerinin standart sapması 3 saat olan normal bir dağılım gösterdiğini bilmektedir. Satın alınacak tüm akülerin ortalama ömrünün en az 50 saat olduğu hipotezini, alternatifine karşı %10 önem derecesinde test edip, ayrıca testin p-değerini bulunuz

Cevap:

Biz aşağıdaki hipotezi (null hipotezi)

$$H_0 : \mu \geq 50$$

şu alternatif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : \mu < 50$$

Ancak aşağıdaki koşul (karar kuralı) sağlandığı zaman H_0 'ı H_1 'a karşı reddedebiliriz

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_\alpha$$

Soruda verilenler: $\bar{x} = 48.2$ $\mu = 50$ $n = 9$ $\sigma = 3$,
dolayısıyla

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{48.2 - 50}{3/\sqrt{9}} = -1.8$$

Standart normal tablosundan %10'e denk gelen z değeri (%10 tabloda olmadığından %90'a bakıp ek-silisini alıyoruz)

$$z_{0.1} = -1.28$$

dolayısıyla aşağıdaki eşitsizlik sağlandığından

$$-1.8 < -1.28$$

veya kısaca 1.8 sayıca 1.28'den büyük olduğundan, null (H_0) hipotezini reddediyoruz

Testin p-değeri ise bizim null hipotezimizi reddedip reddetmemekle kararsız kalacağımız değerdir, yani standart normal tablosundan -1.8 değerini verecek olan olasılık değeridir

$$z_{\alpha} = -1.8$$

Bu da

$$1 - 0.9641 = 0.0359$$

olarak bulunur

Soru 2 (Tests of the Mean of a Normal Distribution: Population Variance Unknown):

Yatırım planlarında değişiklik yapan 21 kişi ele alındığında ortalama yaptıkları yüzde değişiklik aylık harcamalarının 0.078'ine denk gelmektedir. Bu örneklemin standart sapması da 0.142 olmuştur. Tüm populasyon düşünüldüğünde, yapılan yüzde değişikliklerin aylık harcamalarının yüzde 0'ı kadar olduğu hipotezi, alternatif iki yönlü hipoteze karşı test edildiğinde, testin p-değeri ne olacaktır?

Cevap:

Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 \mu = 0$$

şu alternetif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : \mu \neq 0$$

H_0 'ı H_1 'a karşı reddetmek için karar kuralı

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1, \alpha/2} \quad \text{or} \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{n-1, \alpha/2}$$

Soruda verilenler: $\bar{x} = 0.078$ $\mu_0 = 0$ $n = 21$ $s = 0.142$, dolayısıyla

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{0.078 - 0}{0.142/\sqrt{21}} = 2.52$$

21-1=20 serbestlik derecesinde buna karşılık gelebilecek t değeri için

$$t_{20,\alpha/2} = 2.52$$

t tablosundan bakacak olursak $\alpha/2 = 0.01$ 'dir. Dolayısıyla $\alpha = 0.02$ olarak bulunur. Bu da testin p-değeri.

Bu değerin üstündeki her bir önem değerinde null hipotezimiz iki yönlü alternatif hipoteze karşı reddedilecektir.

Soru 3 (Assesing the Power of a Test): Bir ilaç üreticisinin ürettiği 64 adet ilaçtaki istenmeyen madde oranı %3.7 bulunmuştur

a-) Üretilen ilaç populasyonundaki istenmeyen madde oranının %3 veya daha küçük olması null hipotezini, alternatif hipotez olan %3'den büyük olması hipotezine karşı %5 önem derecesinde test ediniz

Cevap:

Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 : P \leq 0.03$$

şu alternatif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : P > 0.03$$

H_0 'ı H_1 'a karşı reddetmek için karar kuralı (decision rule)

$$\text{Reject } H_0 \text{ if : } \frac{\hat{p}_x - P_0}{\sqrt{P_0(1 - P_0)/n}} > z_\alpha$$

Soruda verilenler: $P_0 = 0.03$ $n = 64$ $\hat{p}_x = 0.037$

$$\frac{\hat{p}_x - P_0}{\sqrt{P_0(1 - P_0)/n}} = \frac{0.037 - 0.03}{\sqrt{0.03 * (1 - 0.03)/64}} = 0.328$$

Standart normal dağılımın sağından %5 atıp $z_{.95}$ değerine bakmamız lazım: $z_\alpha = z_{.95} = 1.645$

Dolayısıyla 0.328 değeri bu sayıdan daha büyük olmadığından null hipotezini %5 önem düzeyinde reddedemiyoruz

b-) Üretilen ilaç popülasyonundaki istenmeyen madde oranının gerçek değeri %3.10 ise, a-) şıkkındaki null hipotezini %5 önem derecesinde reddetmenin ihtimalini bulunuz (yani testin gücünü (power))

Eğer alternatif hipotez doğru ise, ilk önce null hipotezimizi reddetmeyerek hata yapma ihtimalimizi bulalım

$$\frac{\hat{p}_x - P_0}{\sqrt{P_0(1 - P_0)/n}} < z_{0.05}$$

eşitsizliğini sağlayan her \hat{p}_x değerinde null hipotezi reddedilmeyecektir. Yani

$$\frac{\hat{p}_x - P_0}{\sqrt{P_0(1 - P_0)/n}} = \frac{\hat{p}_x - 0.03}{\sqrt{0.03 * (1 - 0.03)/64}} < 1.645$$

$$\implies \hat{p}_x < 0.065$$

Populasyonun gerçek ortalaması 0.31 iken böyle bir örneklemin gelmesi ihtimali ise

$$\begin{aligned} P(\hat{p}_x < 0.065) &= P\left(\frac{\hat{p}_x - P_1}{\sqrt{P_1(1 - P_1)/n}} \leq \frac{0.065 - P_1}{\sqrt{P_1(1 - P_1)/n}}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{0.065 - 0.031}{\sqrt{0.031(1 - 0.031)/64}}\right) \\ &= P(Z \leq 1.569) = .9418 \end{aligned}$$

dolayısıyla testimizin gücü

$$Power = 1 - \beta = .0582$$

Soru 4 (Tests of the Variance of a Normal Distribution): 30 kişilik şubede dönem sonu sınavlarının varyansı 480 olmuşsa, bu şubedeki öğrenci profilinin populasyon varyansının 300 olduğu hipotezini alternatif iki yönlü hipoteze göre %5 ve %2 önem derecesinde test ediniz

Cevap:

Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 : \sigma^2 = 300$$

şu alternatif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : \sigma^2 \neq 300$$

H_0 'ı H_1 'a karşı reddetmek için karar kuralı

$$\text{Reject } H_0 \text{ if : } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$$

$$\text{or } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$$

Soruda verilenler: $s^2 = 480$ $n = 30$ $\sigma_0^2 = 300$

$$\implies \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{29 * 480}{300} = 46.4$$

Bu iki yönlü bir hipotez olduğundan, %5 önem derecesi yerine %2.5 değerine, %2 için %1 değerine, 29 serbestlik derecesi için bakıyoruz

$$\chi_{29,.025}^2 = 45.72 \quad (< 46.4)$$

$$\chi_{29,.01}^2 = 49.59 > 46.4$$

dolayısıyla null hipotezini %5 önem düzeyinde reddediyor, ama %2 önem düzeyinde reddedemiyoruz

11. CHAPTER (TWO POPULATION HYPOTHESIS TESTS - İKİ POPULASYONDA HİPOTEZ TESTİ)

Soru 5 (Tests of the Difference between two Normal Population Means: Dependent Samples): 21 finans kuruluşunun devlet desteği almadan önceki ve sonraki verdiği kredilerin öz varlıklarına oranı ölçülmüş, ve devlet desteğinin yarattığı ortalama farkın ortalaması .118, standart sapması da .3055 çıkmıştır. Devlet desteği alan ve almayan grupların popülasyon ortalamalarının birbirine eşit olduğu null hipotezini, alternatif iki yönlü hipoteze karşı test edersek bu testin p-değeri nedir?

Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$$

şu alternatif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : \mu_x - \mu_y \neq 0$$

karar kuralımız ise

$$\text{Reject } H_0 \text{ if : } \frac{\bar{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha/2}$$

$$\text{or } \frac{\bar{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha/2}$$

Soruda verilenler: $\bar{d} = .118$ $s_d = .3055$ $n = 21$,
 H_0 'ı H_1 'a karşı reddetmek için karar kuralında kullanılmak üzere

$$\frac{\bar{d} - D_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{.118 - 0}{.3055/\sqrt{21}} = 1.77$$

Student-t dağılımından $n-1=21-1=20$ serbestlik derecesi için bu değere bakıldığında, tablonun tam bir değer vermediği, ama aşağıda yazan %5 ve %2.5 değerlerinin arasında kaldığı görülebilir

$$t_{20,.05} = 1.725 \quad \text{and} \quad t_{20,.025} = 2.086$$

bu test çift yönlü olduğundan testin p değeri %5 ila %2.5'in 2 katı olan %10 ve %5 değerleri arasındadır (örneğin null hipotezimiz %10 önem derecesinde reddedilir, %5 önem derecesinde reddedilemez)

Soru 6 (Tests of Equality of the Variances between Two Normally Distributed Populations): Bir hipoteze göre piyasada çok firma olması ve dolayısıyla firmalar arasında rekabet olması, o piyasada bir kaç firma olması durumuna göre firmaların market paylarında daha fazla oynaklığı sebep olmaktadır. 4 yıllık bir süre periyodunda rekabetin çok olduğu bir piyasada A firmasının piyasa payındaki değişimin 114.09'luk bir varyansa sahip olduğu görülmüştür. Daha sonra bu piyasa az rekabetin olduğu bir piyasaya dönüşmüş

ve bu sefer aynı firmanın piyasa payının varyansı 7 yıl içinde 16.08 olarak bulunmuştur. İki popülasyonun varyanslarının aynı olduğu null hipotezini, alternatif hipotez olan rekabetin olduğu piyasada daha fazla varyans olduğu hipotezine karşı %1 önem derecesinde test ediniz

Biz aşağıdaki hipotezi

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_Y^2$$

şu alternatif hipoteze göre test etmek istiyoruz

$$H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_Y^2$$

H_0 'ı H_1 'a karşı reddetmek için karar kuralı (decision rule)

$$\frac{s_x^2}{s_y^2} > F_{n_x-1, n_y-1, \alpha}$$

Soruda verilenler:

$$n_x = 4 \quad s_x^2 = 114.09$$

$$n_y = 7 \quad s_y^2 = 16.08,$$

dolayısıyla

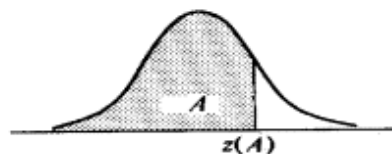
$$\frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{114.09}{16.08} = 7.1$$

Bir hipotezi tek yönlü bir hipoteze karşı %1 önem derecesinde test etmek istersek, dağılımın sadece bir tarafından %1'i atacamızdan; ayrıca payın serbestlik derecesi 3, paydanınki 6 olduğundan

$$F_{3,6,.01} = 9.77$$

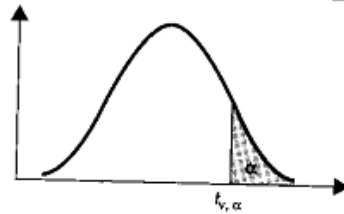
7.1 değeri bu değerden düşük olduğundan null hipotezini %1 önem düzeyinde reddedemiyoruz

Entry is area A under the standard normal curve from $-\infty$ to $z(A)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890

TABLE 6 Cutoff points for the Student's t distribution



For selected probabilities, α , the table shows the values $t_{\nu, \alpha}$ such that $P(t_{\nu} > t_{\nu, \alpha}) = \alpha$, where t_{ν} is a Student's t random variable with ν degrees of freedom. For example, the probability is .10 that a Student's t random variable with 10 degrees of freedom exceeds 1.372.

ν	α				
	.100	.050	.025	.010	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756

F - Distribution ($\alpha = 0.01$ in the Right Tail)

df ₂ \ df ₁		Numerator Degrees of Freedom								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.6	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5
2		98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388
3		34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345
4		21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659
5		16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158
6		13.745	10.925	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761
7		12.246	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188
8		11.259	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106
9		10.561	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511
10		10.044	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424
11		9.6460	7.2057	6.2167	5.6683	5.3160	5.0692	4.8861	4.7445	4.6315
12		9.3302	6.9266	5.9525	5.4120	5.0643	4.8206	4.6395	4.4994	4.3875
13		9.0738	6.7010	5.7394	5.2053	4.8616	4.6204	4.4410	4.3021	4.1911
14		8.8616	6.5149	5.5639	5.0354	4.6950	4.4558	4.2779	4.1399	4.0297
15		8.6831	6.3589	5.4170	4.8932	4.5556	4.3183	4.1415	4.0045	3.8948
16		8.5310	6.2262	5.2922	4.7726	4.4374	4.2016	4.0259	3.8896	3.7804
17		8.3997	6.1121	5.1850	4.6690	4.3359	4.1015	3.9267	3.7910	3.6822
18		8.2854	6.0129	5.0919	4.5790	4.2479	4.0146	3.8406	3.7054	3.5971
19		8.1849	5.9259	5.0103	4.5003	4.1708	3.9386	3.7653	3.6305	3.5225
20		8.0960	5.8489	4.9382	4.4307	4.1027	3.8714	3.6987	3.5644	3.4567
21		8.0166	5.7804	4.8740	4.3688	4.0421	3.8117	3.6396	3.5056	3.3981
22		7.9454	5.7190	4.8166	4.3134	3.9880	3.7583	3.5867	3.4530	3.3458
23		7.8811	5.6637	4.7649	4.2636	3.9392	3.7102	3.5390	3.4057	3.2986
24		7.8229	5.6136	4.7181	4.2184	3.8951	3.6667	3.4959	3.3629	3.2560
25		7.7698	5.5680	4.6755	4.1774	3.8550	3.6272	3.4568	3.3239	3.2172
26		7.7213	5.5263	4.6366	4.1400	3.8183	3.5911	3.4210	3.2884	3.1818
27		7.6767	5.4881	4.6009	4.1056	3.7848	3.5580	3.3882	3.2558	3.1494
28		7.6356	5.4529	4.5681	4.0740	3.7539	3.5276	3.3581	3.2259	3.1195
29		7.5977	5.4204	4.5378	4.0449	3.7254	3.4995	3.3303	3.1982	3.0920
30		7.5625	5.3903	4.5097	4.0179	3.6990	3.4735	3.3045	3.1726	3.0665
40		7.3141	5.1785	4.3126	3.8283	3.5138	3.2910	3.1238	2.9930	2.8876
60		7.0771	4.9774	4.1259	3.6490	3.3389	3.1187	2.9530	2.8233	2.7185
120		6.8509	4.7865	3.9491	3.4795	3.1735	2.9559	2.7918	2.6629	2.5586
∞		6.6349	4.6052	3.7816	3.3192	3.0173	2.8020	2.6393	2.5113	2.4073

F - Distribution ($\alpha = 0.05$ in the Right Tail)

Denominator Degrees of Freedom df_2	Numerator Degrees of Freedom df_1									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.31
2	19.396	19.413	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19.496
3	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5264
4	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.7170	5.6877	5.6581	5.6281
5	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.3650
6	4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	3.1573	3.0929	3.0261	2.9565	2.9205	2.8837	2.8459	2.8072	2.7675	2.7267
10	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
12	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
13	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	2.6022	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1472	2.1030	2.0584	2.0107	1.9604
18	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.8780
20	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9635	1.9145	1.8637	1.8117
22	2.2967	2.2258	2.1506	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8894	1.8380	1.7851
23	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.7570
24	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7896	1.7330
25	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5344	1.4673	1.3993
120	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2839
∞	1.8407	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2314	1.0000